2013

الدرس الأول

عموميات على الدوال

إعداد : الأستاذ كمال. حامدي

1

ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة
ثانية علوم

1

المحتوى

العمليات على الدوال

العمليات الجبرية على الدوال

المساواة

تعريف

القول أنّ الدالتين f و g متساويتان يعني أنّ لهما نفس مجموعة التعريف D وأنّه من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f(x) = g(x)$$

نكتب : $f = g$

العمليات

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب، الجدول التالي يُلخص العمليات على الدوال

العملية	الترميز	التعريف	معرفة من أجل :
المجموع	$f+g$	$x \mapsto f(x)+g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
الفرق	$f-g$	$x \mapsto f(x)-g(x)$	
الجداء	fg	$x \mapsto f(x)\times g(x)$	
القسمة	$\frac{f}{g}$	$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ و $g(x) \neq 0$

تنبيه

$D_f \cap D_g$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية x التي تنتمي إلى ${}_f$ و إلى D_g

تطبيق : الدوال كثيرات الحدود

a عدد حقيقي و n عدد طبيعي. الدالة $x \mapsto ax^n$ المعرفة على $\mathbb{R}$، تُسمّى دالة وحيد الحد ، معامله a و n درجته

بالتعريف كثير الحدود هو مجموع وحيدات الحد

مثال $5x^4+x^3-7x+2$ هو كثير حدود درجته 4 و معاملاته هي : 5، 1، 0، -7، 2

تركيب الدوال

تعريف

f و g دالتان، الدالة $g \circ f$ هي الدالة المعرفة بـ : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + 5$ و g هي الدالة الصمّاء. بتعويض x بـ $f(x)$ في عبارة $g(x)$ نحصل على:

$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x+5}$

إذن الدالة $g \circ f$ هي الدالة $x \mapsto \sqrt{x+5}$ المعرفة على $[-5\,;+\infty[$

ملاحظة

ليس للكتابة $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ معنى إلاّ إذا كان x ينتمي إلى D_f و كان $f(x)$ ينتمي إلى D_g.

مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$

تطبيقات

تطبيق 1 مركب دالتين

f و g دالتان معرفتان بما يلي : $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{x}$

1. أحسب $(g \circ f)(x)$ و حدّد مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$
2. نفس السؤال بالنسبة إلى $f \circ g$

طريقة

لحساب $h(x)$ حيث $h = g \circ f$، نُعوض x بـ $f(x)$ في عبارة $g(x)$. يجب التحقق أنّ $f(x)$ ينتمي إلى D_g

تطبيق 2 تفكيك دالة

h هي الدالة المعرفة بـ : $h(x) = \sqrt{2x-3}$

فكك الدالة h على الشكل: $h = g \circ f$

اتجاه التغيّر

اتجاه تغيّر مجموع دوال

مبرهنة 1

- مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I هي دالة متزايدة تماما على I
- مجموع دالتين متناقصتين تماما على مجال I هي دالة متناقصة تماما على I

البرهان

اتجاه تغيّر الدالة λu

مبرهنة 2

u دالة معرفة على مجال I و λ عدد حقيقي

- إذا كان $\lambda > 0$، فإنّ u و λu لهما نفس اتجاه التغيّر على المجال I
- إذا كان $\lambda < 0$، فإنّ u و λu لهما اتجاها تغيّر متعاكسان على المجال I

البرهان

اتجاه تغيّر مركب دالتين

مبرهنة 3

f و g دالتان رتيبتان، I هو مجال محتوى في D_f و J هو مجال محتوى في D_g حيث من أجل كل عدد حقيقي x من I، $f(x)$ هو في J

- إذا كان لـ f و g نفس اتجاه التغيّر فإنّ $g \circ f$ متزايدة تماما على المجال I
- إذا كان لـ f و g اتجاهان متعاكسان، فإنّ $g \circ f$ متناقصة تماما على المجال I

البرهان

تطبيقات

تطبيق 3 اتجاه تغيّر λu

أدرس حسب إشارة a، اتجاه تغيّر الدالة $x \mapsto ax^2$

ما هو اتجاه تغيّر الدالة $x \mapsto (\sqrt{3}-2)x^2$

تطبيق 4 اتجاه تغيّر مركب دالتين

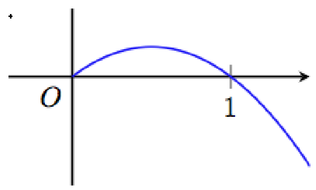
h هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ $h(x) = \sqrt{1-x}$

أثبت أنّها متزايدة تماما على هذا المجال

ملاحظة : اتجاه تغيّر $f - g$ و fg

لا توجد مبرهنات مماثلة للمبرهنة 1 بالنسبة إلى $f - g$ و fg

مثال مضاد بالنسبة إلى $f - g$



f و g هما الدالتان المعرفتان على المجال $[0; \infty[$ بـ $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$

f و g متزايدتان تماما على المجال $[0; +\infty[$ لكن المنحني الممثل للدالة $f - g$

يُبين أنّ الدالة $f - g$ على المجال $[0; \infty[$ليست متزايدة و ليست متناقصة

مثال مضاد بالنسبة إلى fg

f و g هما الدالتان المعرفتان على المجال $]0; \infty[$ بـ $f(x) = x^2$ و $g(x) = -\frac{1}{x}$

f و g متزايدتان تماما على المجال $]0; +\infty[$ لكن الدالة fg المعرفة بـ $fg(x) = -x$ هي متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

أعمال موجّهة و أعمال تطبيقية

التمثيل البياني للدالة $x \mapsto f(x+\alpha)+\beta$

الهدف هو : استنتاج رسم منحنى الدالة $x \mapsto f(x+\alpha)+\beta$ انطلاقا من منحنى الدالة $x \mapsto f(x)$
استعمال geogebra لدراسة تأثير العددين α و β على المنحنى ذو المعادلة $y=f(x)$ الممثل لدالة f

1. فتح البرنامج : أنقر على عرض (Affichage) ثمّ الشبكة (Grille)
2. في حقل كتابة الأوامر أكتب: $f(x)=x^2+x+1$ ثمّ أضغط على الإدخال. على ماذا نحصل ؟
3. إنشاء نقطة A على المنحنى $\mathcal{C}$ المنحنى الممثل للدالة f:
   (أ) أنقر على الأيقونة ثمّ أنقر على المنحنى لتحديد مكان النقطة
   (ب) لتحريك النقطة على المنحنى، يكفي النقر على و وضع سهم الفأرة على النقطة A ثمّ تحريكه. يمكن ملاحظة تغيّر إحداثيات النقطة A في الأعلى على يسار الشاشة (في نافذة الجبر)
   (ج) حدّد بدقة القيمة الحدية للدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها. (يُمكن استعمال التكبير (zoom) لقراءة إحداثيات النقطة A بصفة أدق)
4. (أ) أنشئ على نفس المعلم المنحنى الممثل للدالة $g: x \mapsto f(x)+5$ ثمّ المنحنى الممثل للدالة $h: x \mapsto f(x)-3$
   (ب) بقراءة بيانية شكل جدولي تغيّرات كل من الدالتين g و h
   (ج) ما هو التحويل النقطي الذي يسمح برسم المنحنى $\mathcal{C}_g$ انطلاقا من المنحنى $\mathcal{C}_f$ ؟ و رسم $\mathcal{C}_h$ انطلاقا من $\mathcal{C}_f$ ؟
5. أمسح المنحنيين $_g$ و $\mathcal{C}_h$: أنقر عل الزر الأيمن للفأرة و على المنحنى ثم على مسح
   في ما يلي، نريد تعلم إنشاء منحنى الدالة $g: x \mapsto f(x)+\beta$ حيث β عدد حقيقي. ما هي قيم β التي اخترناها في السؤال 4؟
   إنشاء المتغيّر β:
   أنقر على ثمّ على ورقة العمل لتحديد مكان زر المتغيرات. في النافذة الجديدة، حدد، عدد (Nombre)، اختر ق القيمة الدنيا (Min) و القيمة القصوى (Max) (-5 و 5 مثلا) و اختر كذلك الخطوة التي تُريدها، أنقر على تطبيق. لتغيير اسم المتغيّر، يكفي النقر الأيمن على الاسم ثمّ النقر على إعادة تسمية (Renommer) ثمّ اختيار الرمز β.
   أنشئ المنحنى الممثل للدالة $g: x \mapsto f(x)+\beta$. ماذا تلاحظ ؟ لماذا ؟
   نقوم، الآن، بتغيير قيمة المتغيّر β و ملاحظة تأثير هذا التغيير على منحنى الدالة f. أنقر على ثمّ حرك نقطة العدد β على الحامل.
   أعط تخمينا بالنسبة إلى:
   + تغيّرات f و $f+\beta$
   + رسم المنحنى $\mathcal{C}_g$ انطلاقا من المنحنى $\mathcal{C}_f$
6. أمسح $\mathcal{C}_g$ و β. اتبع نفس الطريقة لإعطاء تخمينا حول العلاقة بين تغيّرات الدالة f و $f \times \alpha$ حيث α عددا حقيقيا.
7. أمسح $\mathcal{C}_g$ و α. أنشئ العدد λ المتغير بين -5 و 10. أنشئ المنحنى الممثل للدالة $g: x \mapsto f(x+\lambda)$. ما هو التحويل النقطي الذي يسمح برسم المنحنى $\mathcal{C}_g$ انطلاقا من المنحنى $\mathcal{C}_f$ ؟ أعط تخمينا لتغيّرات الدالة g.

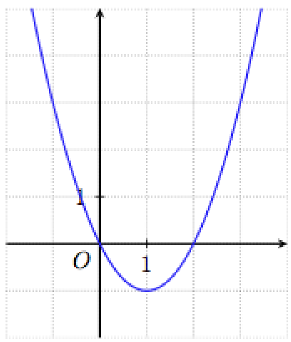
من منحن إلى آخر

ليكن $\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

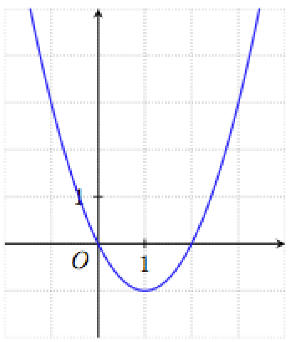
- التمثيل البياني $\mathcal{C}_g$ للدالة g المعرفة بـ : $g(x)=f(x)+k$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$
- التمثيل البياني $\mathcal{C}_h$ للدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(x+\lambda)$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالانسحاب الذي شعاعه $-\lambda\vec{i}$
- التمثيل البياني $\mathcal{C}_k$ للدالة k المعرفة بـ : $k(x)=-f(x)$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالتناظر بالنسبة لمحور الفواصل
- التمثيل البياني $\mathcal{C}_l$ للدالة l المعرفة بـ : $l(x)=f(-x)$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب
- التمثيل البياني $\mathcal{C}_m$ للدالة m المعرفة بـ : $m(x)=f(x+\lambda)+k$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالانسحاب الذي شعاعه $-\lambda\vec{i}+k\vec{j}$
- التمثيل البياني $\mathcal{C}_n$ للدالة n المعرفة بـ : $n(x)=|f(x)|$ هو إتحاد الجزء من $\mathcal{C}_f$ الواقع فوق محور الفواصل، ونظير الجزء من $\mathcal{C}_f$ الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لهذا المحور.

تطبيق: $\mathcal{C}$ هو المنحنى البياني للدالة f. أنشئ التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية.

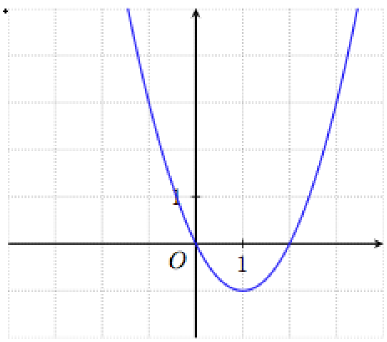
الدالة g حيث: $g(x)=f(x)+2$



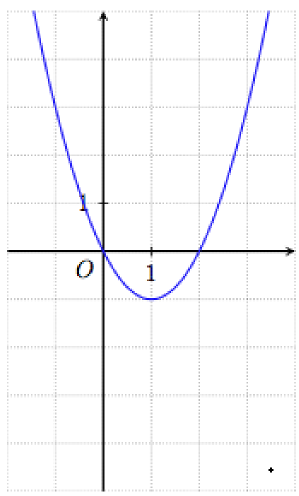
الدالة h حيث: $h(x)=|f(x)|$



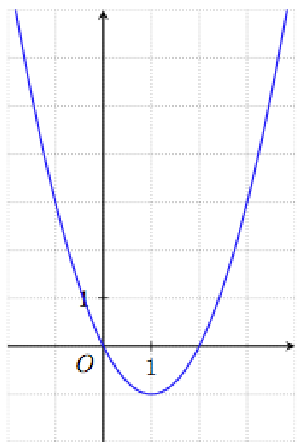
الدالة k حيث: $k(x)=f(-x)$



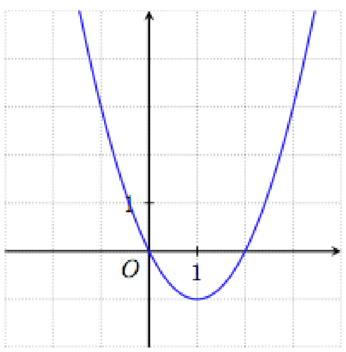
الدالة l حيث: $l(x)=-f(x)$



الدالة m حيث: $m(x)=f(x-1)+3$



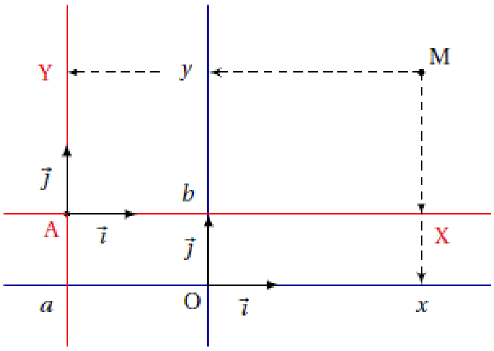
الدالة n حيث: $n(x)=f(x+1)$



تغيير المعلم

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ و $\mathcal{C}$ هو المنحنى ذو المعادلة $y=f(x)$. A نقطة من هذا المستوى.
نُريد تعيين معادلة للمنحنى $\mathcal{C}$ في المعلم $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

إذا كانت $(a;b)$ هي إحداثيات النقطة A في المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$، فإن $\overrightarrow{OA}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$.
لكل نقطة M من المستوي إحداثيات في كل من المعلمين. لتكن $(x;y)$ إحداثيات M في المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ و $(X;Y)$ إحداثياتها في المعلم $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. هذا يعني أنّ $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AM}=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}$.
تسمح لنا علاقة شال (Michel Chasles 1793-1880) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ بالنتيجة التالية:



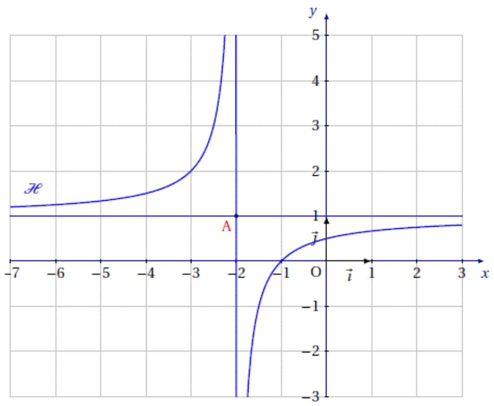
$$\begin{cases} x=X+a \\ y=Y+b \end{cases}\square$$

(دستور تغيير المعلم)

يُؤدي تغييرُ المعلم هذا إلى معادلةٍ للمنحنى $\mathcal{C}$ في المعلم $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ من الشكل $Y=g(X)$.

1. إحداثيات النقطة A في المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ هي $(-3;2)$ و إحداثيات النقطة M هي $(15;4)$. ما هي إحداثيات النقطة M في المعلم $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ ؟
2. إحداثيات النقطة N في المعلم $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ هي $(-8;-9)$. ما هي إحداثيات النقطة N في المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ ؟

التأثير على معادلة المنحنى



تحصلنا، باستعمال راسم للبيانات، على المنحني $\mathcal{H}$ الممثل للدالة $x\mapsto\frac{x+1}{x+2}$ في معلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
يبيّن الشكل أنّ النقطة $A(-2;1)$ مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{H}$
و أنّ المنحنى $\mathcal{H}$ يُمثل، في المعلم $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$، قطع زائد.

1. نعتبر المعلم الجديد $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$، تحقق أنّ دساتير تغيير المعلم هي $x=-2+X$ و $y=1+Y$.
2. (أ) ما هي معادلة المنحنى $\mathcal{H}$ في المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ ؟
   (ب) استعمل دساتير تغيير المعلم و استنتج معادلة للمنحنى $\mathcal{H}$ في المعلم $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ من الشكل $Y=g(X)$.
   (جـ) ما هي طبيعة المنحنى $\mathcal{H}$ ؟

محور التناظر و مركز التناظر

الهدف من هذا التمرين هو الإجابة على السؤالين:

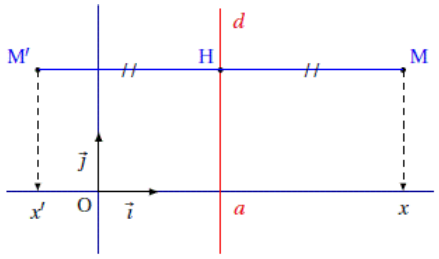
- كيف نبرهن أنّ مستقيماً هو محور تناظر للمنحني الممثل لدالةٍ ؟
- كيف نبرهن أنّ نقطةً هي مركز تناظر للمنحني الممثل لدالةٍ ؟

أولاً: محور التناظر

نعتبر، في معلم متعامد $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$، المنحني $\mathcal{C}$ ذو المعادلة $y=f(x)$ و d المستقيم ذو المعادلة $x=a$.

القول أنّ المستقيم d هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}$ يعني أنّ نظير كل نقطة M من $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى d هي نقطة من $\mathcal{C}$.

1. $\mathrm{M}(x;y)$ نقطة كيفية من المستوي و $\mathrm{M}'(x',y')$ هي نظيرتها بالنسبة إلى المستقيم d. أحسب x' و y' بدلالة x و y.



إعانة: يُمكن استعمال $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}=2\overrightarrow{\mathrm{MH}}$.

2. أثبت النتيجة التالية:

القول أنّ المستقيم d هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}$ يُكافئ القول أنّ:

من أجل كل $x=a+h$ من D_f، $x-h$ ينتمي إلى $\mathcal{D}_f$ و $\boldsymbol{f(a+h)=f(a-h)}$.

3. تطبيق:

f هي الدالة $\mapsto -3x^2+5-1$. أثبت أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{5}{6}$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة f.

ثانيا: مركز التناظر

1. نعتبر، في معلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$، المنحني $\mathcal{C}$ ذو المعادلة $y=f(x)$ و النقطة A ذات الإحداثيات $(a;b)$.

القول أنّ النقطة A هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}$ يعني أنّ نظير كل نقطة M من $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى A هي نقطة من $\mathcal{C}$.

$\mathrm{M}(x;y)$ نقطة كيفية من المستوي و $\mathrm{M}'(x',y')$ هي نظيرتها بالنسبة إلى النقطة $\mathrm{A}(a;b)$.

أثبت أنّه إذا كان $x=a+h$، فإنّ: $x'=a-h$ و $y+y'=2b$.

إعانة: أنشئ شكلاً.

2. أثبت النتيجة التالية:

القول أنّ النقطة A هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}$ يُكافئ القول أنّ:

من أجل كل $x=a+h$ من D_f، $x-h$ ينتمي إلى $\mathcal{D}_f$ و $\boldsymbol{\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}}=b$

3. تطبيق:

f هي الدالة $x\mapsto\frac{2x-1}{x+1}$. أثبت أنّ النقطة $\mathrm{A}(-1;2)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة f.

تمارين و مسائل

...