تعيين النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

نستعمل القواعد المألوفة لحساب النهايات و نصل إلى:

- إمّا إلى نتيجة تسمح بالنتيجة مباشرة
- إمّا إلى حالة عدم تعين:
  $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\infty-\infty$ ، $0\times\infty$

في مالا نهاية:

- نهاية كثير حدود هي النهاية في مالا نهاية لحدّه الأعلى درجة
- نهاية كسر ناطق هي النهاية في مالا نهاية لحاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة.

تعيين المستقيمات المقاربة لمنحنى

إذا كان ...	فإنّ ...
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \quad (b\in\mathbb{R})$	المستقيم ذو المعادلة $y=b$ ، مستقيم مقارب أفقي لـ $\mathcal{C}_f$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \quad (a\in\mathbb{R})$	المستقيم ذو المعادلة $x=a$ ، مستقيم مقارب عمودي لـ $\mathcal{C}_f$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-(ax+b)]=0 \quad (a\in\mathbb{R})$	المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ ، مستقيم مقارب مائل لـ $\mathcal{C}_f$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad (a\in\mathbb{R}^*)$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b \quad (b\in\mathbb{R})$	المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ ، مستقيم مقارب مائل لـ $\mathcal{C}_f$

كيف نعيّن نهاية دالة مركبة ؟

a، b و c تدل على عدد حقيقي، أو $+\infty$ أو $-\infty$

(أ) نكتب f على الشكل $f=g\circ h$ ، أو $f(x)=g(h(x))$

(ب). نُعيّن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} h(x)=b\\ \lim\limits_{y\to b} g(y)=c\end{cases}$ ثم نستنتج $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

تطبيق 1 أحسب النهايات التالية:

(أ) $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$ عند $+\infty$ (ب) $g(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ عند -1

كيف نستعمل النهايات بالمقارنة ؟ (تُستعمل عامة في الدوال المثلثية)

نُعيّن حصراً	نُعيّن النهايات	ثم نستنتج
$g(x)\le f(x)\le h(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$ ، ℓ عدد حقيقي	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$
$g(x)\le f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$
$f(x)\le g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

تطبيق 2

- هل للدالة $f: x\mapsto 2x+\cos x$ نهاية عند $-\infty$ ؟
- هل للدالة $g: x\mapsto x(2+\sin x)$ نهاية عند $+\infty$ ؟ عند $-\infty$ ؟ عند 0 ؟

كيف نُزيل حالة عدم التعيين في الدوال الصماء؟

	حالة عدم التعيين	الطريقة
النهاية عند عدد a	$\frac{0}{0}$	نستعمل عامةً مُرافق عبارةٍ في البسط أو في المقام نستخرج العبارة $(x-a)$ كعامل مشترك في البسط و في المقام بعد الاختزال، نستنتج النهاية المطلوبة
النهاية مالا نهاية	$\frac{\infty}{\infty}$	نستخرج الحد الأكثر "تأثير" كعامل مشترك في البسط و في المقام لا ننسى أنّ $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$
النهاية مالا نهاية	$\infty-\infty$	نستخرج الحد الأعلى درجة كعامل مشترك أو نستعمل المرافق لعبارة في الجدول أسفله، نبين كيفية اختيار التقنية المناسبة

تطبيق 3

1. أحسب النهايات التالية:

(أ) $f(x)=\frac{2x-2}{\sqrt{x+3}-2}$ عند 1　　(ب) $g(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ عند 1

(جـ) $h(x)=\frac{2-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+5}-3}$ عند 2　　(د) $m(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x-x^2}$ عند 0

2. أحسب النهايات التالية:

(أ) $n(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+2x-3$ عند $-\infty$　　(ب) $p(x)=\sqrt{4x^2-4}-2x+3$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=8$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to2} h(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to0} m(x)=\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} n(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)=3$

الدالة		الحد الأكثر "تأثير"	طريقة لإزالة حالة عدم التعيين
f	$\sqrt{x^2+2x+2}$	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$	الحدين الأكثر تأثير في العبارتين مختلفين. إذن التحليل يسمح بالاستنتاج
	$2x-3$	$2x$	
g	$\sqrt{4x^2-4}$	$\sqrt{4x^2}=2\lvert x\rvert$	الحدين الأكثر تأثير في العبارتين متعاكسين، التحليل لا يسمح هنا بالاستنتاج. إذن نستعمل المرافق للعبارة $\sqrt{4x^2-4}-2x+3$
	$-2x+3$	$-2x$	

تطبيق 4

أحسب النهايات التالية:

(أ) $f(x)=\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3}-4}$ عند $+\infty$　　(ب) $g(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$