2013

الدرس الثاني

المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية

إعداد : الأستاذ كمال. حامدي

2

ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة
ثانية علوم

2

المحتوى

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+3)^2 - 25$. (الشكل A، و هي صيغة الشكل النموذجي).

1. تحقق أنّه، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، يُمكن كتابة $f(x)$ على أحد الشكلين التاليين:

$f(x) = x^2 + 6x - 16$ (الشكل B و هي صيغة النشر)　|　$f(x) = (x-2)(x+8)$ (الشكل C و هي صيغة التحلل)

2. أدرس المسائل التالية بالإجابة في الخانة المناسبة:

أ) اختر الشكل المناسب لحساب

	الشكل C	الشكل B	الشكل A
$f(0)$			
$f(-3)$			
$f(2)$			

ب) اختر الشكل المناسب لحل المعادلات:

	الشكل C	الشكل B	الشكل A
$f(x) = 0$			
$f(x) = 11$			
$f(x) = -16$			

ج) ليكن $\mathcal{C}$ التمثيل البياني للدالة f. اختر الشكل المناسب لتعيين

	الشكل C	الشكل B	الشكل A
إحداثيات القيمة الحدية الصغرى للدالة f			
نقط تقاطع المنحنى $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل			
نقطة تقاطع المنحنى $\mathcal{C}$ مع محور التراتيب			

3. استنتج، من كل المعلومات السابقة، رسم المنحنى $\mathcal{C}$ في المعلم المرفق في الصفحة الموالية

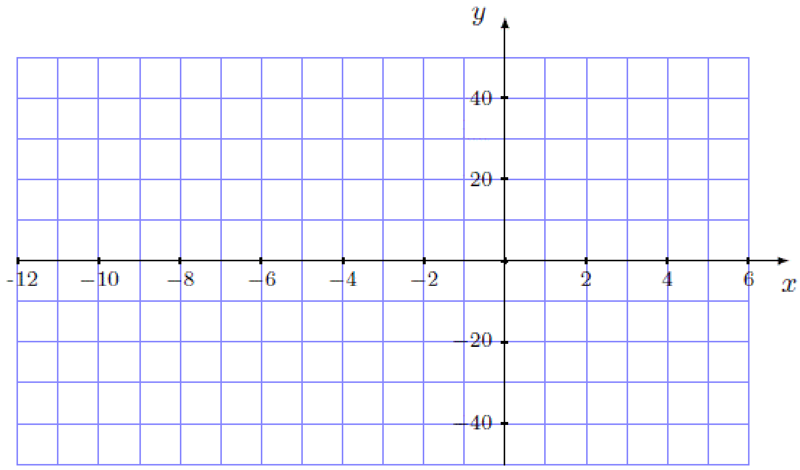
4. **من شكل إلى آخر:**

يُعطى الشكل $g(x) = 3(x+1)(x-4)$ (صيغة التحليل). جد الشكلين: النموذجي و المنشور للعبارة g:

....

يُعطى الشكل $k(x) = x^2 - 7x + 12$ (صيغة النشر). جد الشكلين: النموذجي و التحليلي للعبارة h:

....



حل معادلة من الدرجة الثانية

تعريف

تعريف

معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x هي معادلة يُمكن كتابتها على الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a، b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

حل معادلة من الدرجة الثانية

نضع $(x) = ax^2+bx+c$ مع $a \neq 0$

كتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية

بما أنّ $a \neq 0$، $f(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$، لكن $x^2+\frac{b}{a}x = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ لأنّ $x^2+\frac{b}{a}x$ هو بداية نشر $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

إذن

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\square$$

حل المعادلة $f(x)=0$

بوضع $\Delta = b^2-4ac$، يكون $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta < 0$، فإنّ $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. العدد بين العاكفتين هو موجب تماما و عليه المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حل

إذا كان $\Delta = 0$، فإنّ $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a^2}\right)^2$ و بما أنّ $a \neq 0$ فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً مضاعفاً هو $x = -\frac{b}{2a}$.

إذا كان $\Delta > 0$، فإنّ $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ و :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\square \end{aligned}$$

بوضع $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ يكون $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

و بما أنّ $a \neq 0$، فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2

تعريف

العدد b^2-4ac يُسمّى مُميّز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ أو مُميّز ثنائي الحد ax^2+bx+c. نرمز له Δ

مبرهنة

- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ المعادلة ليس لها حل
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ للمعادلة حلاًّ مضاعفاً هو $x=-\frac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ للمعادلة حلين متمايزين هما : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

تطبيقات

تطبيق 1 تعيين الشكل النموذجي

عيّن الشكل النموذجي لثنائي الحد $f(x)=2x^2-8x+9$

تطبيق 2 حل معادلة من الدرجة الثانية

حل المعادلات من الدرجة الثانية التالية :

(أ) $2x^2+5x-7=0$ **(ب)** $3x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{48}=0$ **(جـ)** $x^2-5x+6=0$

تحليل ثنائي الحد و إشارته

تحليل ثنائي الحد

مبرهنة تحليل ثنائي الحد f المعرف بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ مع $a\neq 0$

إذا كان للمعادلة $f(x)=0$ حلين متمايزين x_1 و x_2 (أي إذا كان $\Delta>0$) فإنّه من أجل كل عدد حقيقي x،
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

ملاحظة

في حالة $\Delta=0$، يُمكن تحليل $f(x)$ على شكل $(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$، أمّا إذا كان $\Delta<0$ فإنّه لا يُمكن تحليل $f(x)$

إشارة ثنائي الحد

مبرهنة

- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ إشارة $f(x)$ هي دوما إشارة a
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ إشارة $f(x)$ هي دوما إشارة a (باستثناء إذا كان $x=-\frac{b}{2a}$ لأن في هذه الحالة $f(x)=0$)
- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ إشارة $f(x)$ هي إشارة a باستثناء قيم x المحصورة بين الحلين لأنّ في هذه الحالة إشارة $f(x)$ هي عكس إشارة a

الحل

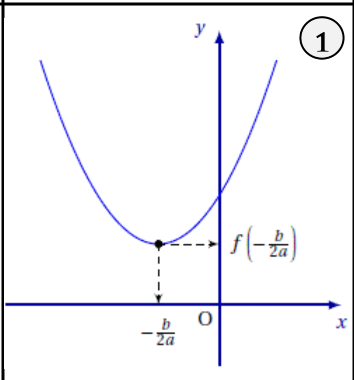
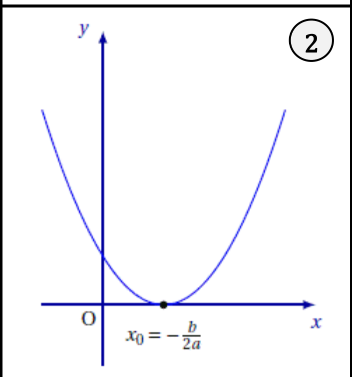
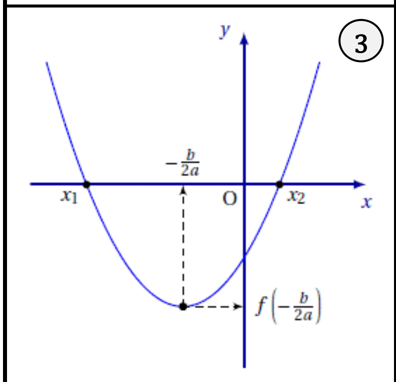
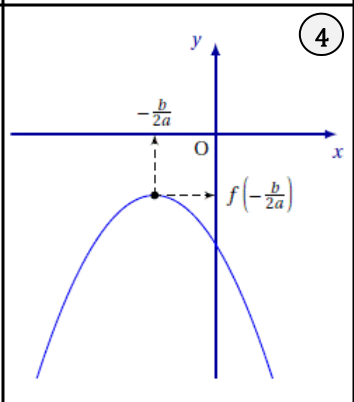
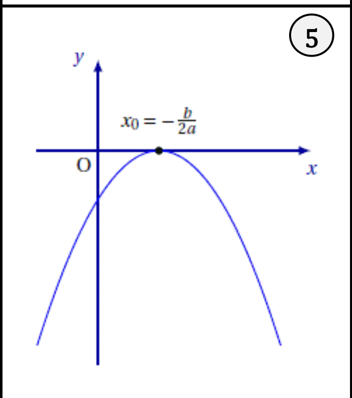
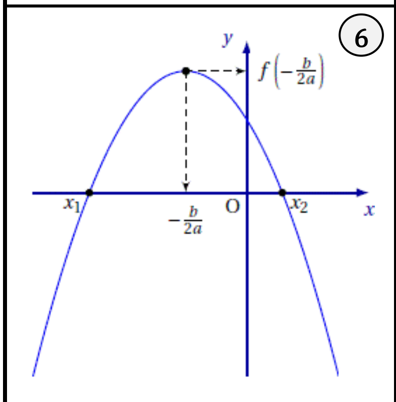
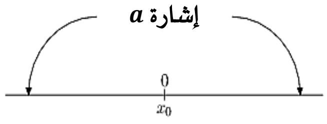
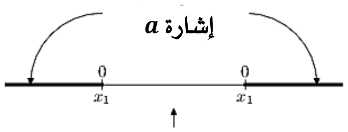
الملخص

$P(x)=ax^2+bx+c$ ثلاثي الحد ، شكله النموذجي $P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ مع $\Delta=b^2-4ac$

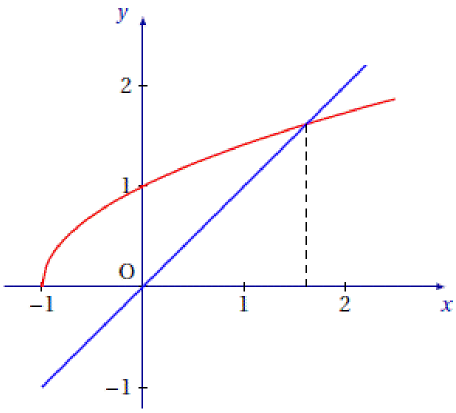
التمثيل البياني للدالة $x\mapsto ax^2+bx+c$ هو صورة القطع المكافئ ذو المعادلة $y=ax^2$ بالانسحاب الذي شعاعه $-\frac{b}{2a}\vec{i}-\frac{\Delta}{4a^2}\vec{j}$

يكون هذا القطع المكافئ " موجّه نحو الأعلى" إذا كان $a>0$ و " موجّه نحو الأسفل" إذا كان $a<0$.

فاصلة ذروة هذا القطع المكافئ هي $-\frac{b}{2a}$

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
حلول المعادلة $P(x)=0$	لا توجد حلول	حل "مضاعف" $x_0=-\frac{b}{2a}$	حلان متمايزان $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$
تحليل $P(x)=ax^2+bx+c$	لا يمكن تحليل $P(x)$	$P(x)=a(x-x_0)^2$	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
$a>0$ وضعية المنحنى بالنسبة إلى محور الفواصل			
إشارة $P(x)=ax^2+bx+c$	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline P(x) & & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline P(x) & & + & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline P(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$
$a<0$ وضعية المنحنى بالنسبة إلى محور الفواصل			
إشارة $P(x)=ax^2+bx+c$	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline P(x) & & - & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline P(x) & & - & 0 & - & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline P(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$
إشارة $P(x)$ هي إشارة a، إلّا من أجل قيم x المحصورة بين الحلين في حالة وجودها	**إشارة a**		

أعمال موّجهة (معادلات و متراجحات مختلفة)



حل معادلة صمّاء

1. حل المعادلة $\sqrt{x+1} = x$

تُسمّى هذه المعادلة صماء لأنها تشمل على جذر تربيعي لا يُمكن تبسيطه.

الشكل المقابل يُبيّن التمثيلين البيانيين للدالتين :

$x \mapsto x$ و $x \mapsto \sqrt{x+1}$

استعمل هذا الشكل لتخمين عدد حلول المعادلة.

لحل هذا الشكل من المعادلات نستعمل النتيجة التالية:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b، القول أنّ $\sqrt{a} = b$ يكافئ القول أنّ $b \geqslant 0$ و $a = b^2$

(أ) أثبت صحة هذا التكافؤ

(ب) إذن، لحل المعادلة $\sqrt{x+1} = x$، يرجع إلى البحث عن الأعداد الحقيقية x حيث:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+1 = x^2 \end{cases}$$

أكمل حل المعادلة المعطاة.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(أ) $\sqrt{2t+3} = 0{,}5t+1$ (ب) $\sqrt{x-2} = 1-x$

3. (أ) أثبت أنّ:

$\sqrt{a} = \sqrt{b}$ تكافئ $a \geqslant 0$، $b \geqslant 0$ و $a = b$

(ب) حل المعادلة $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x^2+2}$

حل معادلة مضاعفة التربيع

نقترح المسألة التالية:

هل يوجد عدد حقيقي بحيث يكون مجموع مربعه و مقلوب مربعه يساوي 6 ؟

لحل هذه المسألة يرجع إلى الحل في $\mathbb{R}-\{0\}$ للمعادلة $x^2+\frac{1}{x^2} = 6$.

في $\mathbb{R}-\{0\}$ هذه المعادلة تكافئ المعادلة $x^4-6x^2+1 = 0$ (E)

المعادلة من الدرجة الرابعة $x^4-6x^2+1 = 0$ تسمى معادلة مضاعفة التربيع لأنّها لا تشمل إلاّ على العوامل x^4، x^2 و العامل الثابت.

حل المعادلة (E)

إعانة: لحل معادلة مضاعفة التربيع، نُدخل المتغيّر المساعد $t = x^2$.

1. أثبت أنّه إذا كان x_0 حلاً للمعادلة (E)، فإنّ $t_0 = x_0^2$ هو حلا للمعادلة:

$$t^2-6t+1 = 0 \qquad (E')$$

2. عكسيا، أثبت أنّه إذا كان t_0 حلا موجبا للمعادلة (E')، فإن العددين $x_1 = \sqrt{t_0}$ و $x_2 = -\sqrt{t_0}$ هما حلين للمعادلة (E).

3. جد إذن حلول المعادلة (E).

حل معادلات و متراجحات مضاعفة التربيع حل المعادلات و المتراجحات المقترحة:

(أ) $x^4-x^2-12 = 0$ (ب) $2x^4-\frac{3}{2}x^2+1 = 0$

(جـ) $x^4+2x^2+1 = 0$ (د) $x^4-x^2-1 \geqslant 0$

(هـ) $x^4-5x^2+6 \geqslant 0$ (و) $x^4+8x^2-9 \leqslant 0$

أعمال تطبيقية : خوارزمية هورنر (HÖRNER)

تمهيد

نعلم أنّه إذا كان P كثير حدود و a جذرا له فإنّه يوجد كثير حدود Q حيث $P(x) = (x-a)Q(x)$. توجد عدة طرق لتعيين معاملات كثير الحدود Q، من بينها : المطابقة والقسمة الاقليدية. في هذا العمل التطبيقي سنتطرق إلى طريقة أخرى تُعرف بـ : خوارزمية (HÖRNER) و تتميّز هذه الطريقة بسرعة تعيين معاملات كثير الحدود Q

مثال

نعتبر كثير الحدود

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x - 12$$

الذي يقبل $a = 2$ جذرا له. نُريد تخمين طريقة لتعيين معاملات $Q(x)$ حيث $P(x) = (x-2)Q(x)$:

القسمة الاقليدية تُعطينا

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +7x^2 & -4x & -12 & x-2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & & & & x^3-1x^2+5x+6 \\ \cline{1-2}
 & -1x^3 & +7x^2 & -4x & -12 & \\
 & +x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x^2 & -4x & -12 & \\
 & & -5x^2 & +10x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 6x & -12 & \\
 & & & -6x & +12 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

يمكن ملاحظة أنّ

$$-1 = -3 + 2 \times 2$$
$$5 = 7 + 2 \times (-1)$$
$$6 = -4 + 2 \times 5$$

التخمينات ؟

...

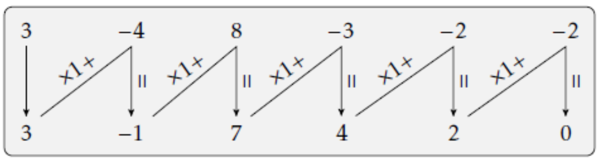
تطبيق

ليكن كثير الحدود

$$P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 2x - 2.$$

$a = 1$ جذر لكثير الحدود P

يُمكن تصوير خوارزمية (HÖRNER) بالجدول التالي



و عليه

$$P(x) = (x-1)(3x^4 - x^3 + 7x^2 + 4x + 2)$$

تمارين و مسائل للتعمق

...

حل تمارين و إرشادات

...