حل الوظيفة المنزلية رقم 01

التمرين الأول

1.(أ) $D=\mathbb{R}-\{1\}$

(ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$

(جـ) ▪ مستقيم مقارب عمودي، $x=1$ هي معادلة له

▪ مستقيم مقارب مائل، $y=x-1$ هي معادلة له

(د) المنحنى $(\mathcal{C})$ يقع تحت مستقيمه المقارب المائل على المجال $]-\infty;1[$ و يقع فوقه على المجال $]1;+\infty[$

(هـ) الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و على $[3;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $[-1;1[$ و على $]1;3]$

(و) إذا كان $x<1$ فإنّ $f(x)<0$ و إذا كان $x>1$ فإنّ $f(x)>0$

2.(أ) الدالة g معرفة إذا كان $f(x)\geq 0$ أي من أجل $x\in]1;+\infty[$

(ب) ▪ $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$ و (بوضع $X=f(x)$) $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن بالتركيب $\lim_{x\overset{>}{\to}1} g(x)=+\infty$

▪ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، و (بوضع $X=f(x)$) $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن بالتركيب $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

(جـ) لدينا : $g: x\overset{f}{\mapsto} f(x)\overset{u}{\mapsto}\sqrt{f(x)}$

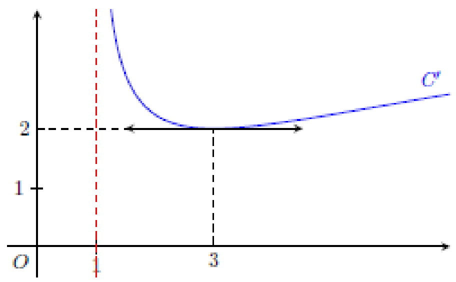
من أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $g(x)=(u\circ f)(x)$ حيث u هي الدالة الصماء

▪ الدالة f متناقصة على المجال $]1;3]$ و الدالة u متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ إذن الدالة g متناقصة على المجال $]1;3]$

▪ الدالة f متزايدة على المجال $[3;+\infty[$ و الدالة u متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ إذن الدالة g متزايدة على المجال $[3;+\infty[$

(د) $g(3)=\sqrt{f(3)}=\sqrt{4}=2$

(هـ) التمثيل البياني للدالة g



التمرين الثاني

1.(أ)
$$f(x)=\begin{cases}-x-1+\frac{x}{x^2-1}, & x\in]-\infty;-1[\\ x+1+\frac{x}{x^2-1}, & x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

(ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

▪ عند -1 بقيم أصغر، $x^2-1>0$ و منه $\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$

عند -1 بقيم أكبر، $x^2-1<0$ و منه $\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$

▪ عند 1 بقيم أصغر، $x^2-1<0$ و منه $\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$

عند 1 بقيم أكبر، $x^2-1>0$ و منه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=-\infty$

2.(أ)
$$f'(x)=\begin{cases}-1-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}, & x\in]-\infty;-1[\\ \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, & x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

(ب) إذا كان $x\in]-\infty;-1[$ ، فإنّ $f'(x)<0$

و إذا كان $x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[$ فإنّ إشارة $f'(x)$ هي إشارة (x^2-3) ، بمعنى $f'(x)<0$ على $]-1;1[\cup]1;\sqrt{3}[$ و $f'(x)>0$ على $]\sqrt{3};+\infty[$

(جـ) جدول التغيّرات

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ ↘	$-\infty$	|| $+\infty$ ↘	$-\infty$	|| $+\infty$ ↘		$\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$	↗	$+\infty$

3.(أ) ▪ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ ، إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$

على المجال $]1;+\infty[$ ، $\frac{x}{x^2-1}>0$: المنحنى $(\mathcal{C})$ يقع فوق مستقيمه المقارب

▪ $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ ، إذن المستقيم ذو المعادلة $y=-x-1$ هو مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ عند $-\infty$

على المجال $]-\infty;-1[$ ، $\frac{x}{x^2-1}<0$: المنحنى $(\mathcal{C})$ يقع تحت مستقيمه المقارب

(ب) $f'(0)=0$ و $f(0)=1$. إذن المماس في النقطة $A(0;1)$ من المنحنى $(\mathcal{C})$ له المعادلة : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=1$

على المجال $]-1;1[$ ، $f(x)-1=x+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x^3}{x^2-1}$ و إشارة هذا الفرق هي عكس إشارة x ، و عليه :

إذا كان $-1<x<0$ فإنّ $(\mathcal{C})$ يقع فوق المماس (T) و إذا كان $0<x<1$ فإنّ $(\mathcal{C})$ يقع تحت المماس (T) (ملاحظة : النقطة A تُسمى نقطة انعطاف)