

2013

الدرس الثالث

المرجع

إعداد: الأستاذ كمال. حامدي

3

ثانوية العربي بن مهدي _العلمة
ثانية علوم



المحتوى

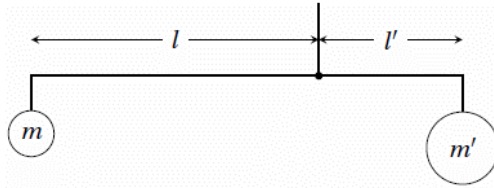
- 1..... أنشطة
- 3..... مُرجح نقطتين مثقلتين
- 6..... مُرجح ثلاث نقط مثقلة و أكثر
- 8..... طرائق
- 9..... تمارين و مسائل للتعلم
- 10..... حل تمارين و إرشادات



أنشطة

نعلم في الفيزياء، حسب قانون أرخميدس، أن توازن جملة رافعة يكون محقق إذا كان جُداءات الكتل بطول الذراع المناسب متساوية.

مع رموز الشكل التالي، يكون التوازن محقق إذا كان: $ml = m'l'$



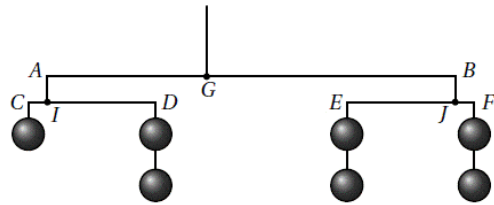
النشاط الأول: نقطة التوازن

1. عيّن وضعية نقطة التوازن في الحالات التالية:

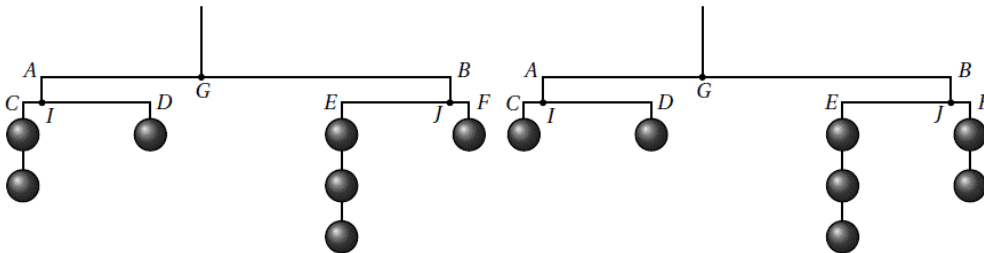
- $m' = 1$ و $m = 1$
- $m' = 1$ و $m = 2$
- $m' = 5$ و $m = 3$

2. يمثل الشكل التالي متحرك مُكون من قضيب و أسلاك مهملة الكتلة حيث $AB = 30$ cm و $CD = EF = 10$ cm

و سبعة كريات تزن كل واحدة 10 g. هذا المتحرك في توازن. عيّن وضعية كل من I ، J ، و G.

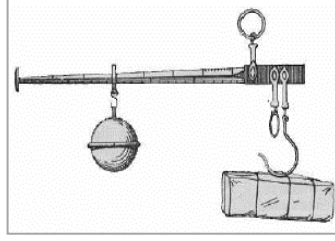


3. نفس الأسئلة مع الشكلين التاليين



النشاط الثاني: ميزان الرمانة

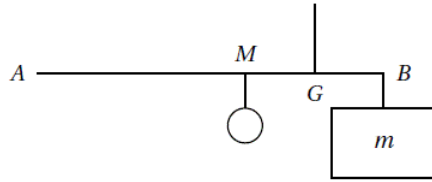
بخلاف الميزان التقليدي، يتميز هذا الميزان بما سمّاه المصريون «رُمانة الميزان»: فهي قطعة حديدية صغيرة في الميزان، يحركها التاجر لإحداث التوازن بين وحدات الكيلوجرام والمواد الموزونة. ليس لذراعي الكفتين نفس الطول، فذراع الكفة التي تحتوي على الكتلة الموزونة طولها ثابت لكن طول الذراع الذي يحتوي على كتلة التوازن متغيرة. يشمل الذراع الأطول على تقسيمات تُشير إلى الكتل المناسبة.



في هذا الميزان لا نحصل على التوازن بمساواة الكتلتين، لكن بالتأثير على طول الذراع الذي يحمل الثقل الموازن فنقوم بإزاحة هذا الثقل الموازن حتى الحصول على الوضعية الأفقية ثم نقرأ على القضيب كتلة المادة الموزونة المناسبة

في هذا النشاط نقوم بنمذجة هذا الميزان على الطريقة التالية:

- الميزان مُكون من قضيب AB مهمل الكتلة حيث $AB = 2,5 \text{ cm}$
 - الميزان مُثبت بالسقف من النقطة G حيث $BG = 0,5 \text{ cm}$
 - الكتلة المجهولة m مُثبتة بقضيب مهمل الكتلة في النقطة B
 - الثقل الموازن الذي كتلته 2 kg مُثبت بقضيب مهمل الكتلة في النقطة M ، حيث $M \in [AB]$
- نضع $x = MG$



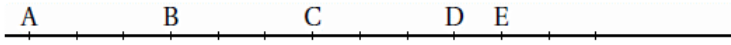
1. عيّن m في كل حالة من الحالات التالية:
 - $x = 50 \text{ cm}$
 - $x = 1 \text{ m}$
 - $x = 1,5 \text{ m}$
2. عيّن x في كل حالة من الحالات التالية:
 - $m = 1 \text{ kg}$
 - $m = 3 \text{ kg}$
 - $m = 5 \text{ kg}$
3. ما هي الكتلة القصوى التي بإمكان هذا الميزان وزنها؟ ما هي الكتلة الأدنى التي بإمكان هذا الميزان وزنها؟

النشاط الثالث: صحيح أم خاطئ

- | خاطئ | صحيح | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 1. لدينا $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ ، نستنتج $\vec{BA} = -3\vec{CA}$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2. لدينا $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ ، نستنتج $\vec{CB} = 2\vec{AC}$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3. لدينا $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ ، نستنتج $\vec{BA} = \frac{3}{2}\vec{BC}$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 4. لدينا $\vec{AB} = \vec{CB}$ ، نستنتج أن B هو منتصف $[AC]$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 5. لدينا $\vec{NM} + \vec{NP} = \vec{0}$ ، نستنتج أن N هو منتصف $[MP]$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 6. لدينا I هو منتصف $[AB]$ ، نستنتج $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 7. لدينا I هو منتصف $[BC]$ ، نستنتج $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$ |

النشاط الرابع: علاقات شعاعية

لتكن النقط A، B، C، D و E الممثلة على مستقيم حسب الوضعية التالية:



1. في كل حالة من الحالات الآتية، أوجد العدد الحقيقي k الذي يُحقق العلاقة المناسبة
 $\overline{AB} = k\overline{BC}$ • $\overline{AD} = k\overline{AB}$ • $\overline{BD} = k\overline{BA}$ • $\overline{CB} = k\overline{CE}$ •
2. عيّن، لكل علاقة من العلاقات السابقة، عددين حقيقيين α و β يحققان:
 $\alpha\overline{BA} + \beta\overline{BC} = \vec{0}$ • $\alpha\overline{AB} + \beta\overline{AD} = \vec{0}$ • $\alpha\overline{BA} + \beta\overline{BD} = \vec{0}$ • $\alpha\overline{CB} + \beta\overline{CE} = \vec{0}$ •
3. أنشئ على المستقيم السابق النقط K ، L و M المعرفة بما يلي:
 $2\overline{KB} + \overline{KC} = \vec{0}$ • $\overline{LE} - 5\overline{LC} = \vec{0}$ • $3\overline{ME} + 2\overline{MA} = \vec{0}$ •

مُرجح نقطتين مثقلتين

مبرهنة الوجود و تعاريف

تعريف 1: A نقطة و α عدد حقيقي. الثنائية $(A; \alpha)$ تسمى نقطة مثقلة.

مبرهنة: A و B نقطتان من المستوي، α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$. توجد نقطة وحيدة G تحقق:
 $\alpha\overline{GA} + \beta\overline{GB} = \vec{0}$

البرهان:

تعريف 2: النقطة G تسمى مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$. تُسمى كذلك مرجح النقطتين المثقلتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$

ملاحظات: إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فإن المرجح غير معرف.

لإنشاء المرجح، نستعمل العلاقة $\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}$

أمثلة: [AB] قطعة مستقيمة طولها 6 cm.

المرجح G_1 للجملة $\{(A; 1); (B; 2)\}$ يُحقق: _____

المرجح G_2 للجملة $\{(A; 7); (B; -1)\}$ يُحقق: _____

الرسم:

خواص المرجح

علاقة لإنشاء المرجح: إذا كان G هو مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ ، فإن:

$$\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}$$

البرهان (المبرهنة 1)

تجانس المرجح: إذا كان G هو مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ ،

فإن من أجل كل عدد حقيقي k غير معدوم، G هو مرجح الجملة $\{(A; k\alpha); (B; k\beta)\}$ بمعنى المرجح لا يتغير بضرب كل المعاملات بنفس العدد الحقيقي غير المعدوم

البرهان:

مثال: مرجح الجملة $\{(A; -60); (B; 12)\}$ هو إذن مرجح الجملة :

وضعية المرجح: إذا كان G هو مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ ، فإن G ينتمي إلى المستقيم (AB) .

البرهان:

ليكن α عدد حقيقي غير معدوم. المرجح G للجملة $\{(A; \alpha); (B; \alpha)\}$ هو منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

البرهان:

و تُسمى G في هذه الحالة مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين A و B

المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M مرجح الجملة $\{(A; 1 - k); (B; k)\}$ لما k يسمح \mathbb{R}

البرهان:

اختصار مجموع أشعة (الاختصار الشعاعي لـ Leibniz)

ليكن G مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$. من أجل كل نقطة M من المستوي، لدينا:

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG}$$

البرهان:

ملاحظات: إذا كان $\alpha + \beta = 0$ ، فإن الشعاع $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}$ مستقل عن النقطة M .

أمثلة: لتكن A و B نقطتان مختلفتان من المستوي

1. عيّن المجموعة \mathcal{E}_1 للنقط M من المستوي بحيث يكون $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - 6\vec{MB}\|$

الحل:

2. عيّن المجموعة \mathcal{E}_1 للنقط M من المستوي بحيث يكون $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

الحل:

العبرة التحليلية

المستوي المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ من المستوي.

إحداثيات المرجح G للجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ هي:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

البرهان:

مثال: $A(1; 3)$ و $B(2; 1)$ نقطتان من المستوي. إحداثيات المرجح G للجملة $\{(A; -1); (B; 2)\}$ هي:

مُرَجِح ثلاث نقط مثقلة و أكثر

تعميم التعاريف

مبرهنة: A, B و C ثلاث نقط من المستوي، α, β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

البرهان:

تعريف: النقطة G تسمى مرجح جملة النقط المثقلة $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$.

تعميم خواص المرجح

علاقة لإنشاء المرجح: إذا كان G هو مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$ ، فإن:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$$

اختصار مجموع أشعة: ليكن G مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$. من أجل كل نقطة M من المستوي، لدينا:

$$\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

البرهان:

ملاحظة: إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ، فإن الشعاع $\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$ مستقل عن النقطة M

خاصة التجميع للمرجح: إذا كان G مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$ و كان H مرجح الجملة

$\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ مع $\alpha + \beta \neq 0$. فإن G هو مرجح للجملة $\{(H; \alpha + \beta); (C; \gamma)\}$

بمعنى لإيجاد مرجح n نقطة، يُمكن أن نستبدل عدّة نقط بمرجحها شريطة أن يُرفق لهذا المرجح مجموع المعاملات (غير المدوم) لهذه النقط.

البرهان:

مثال: ليكن G مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; 4); (C; -3)\}$ و H مرجح الجملة $\{(B; 4); (C; -3)\}$.

أي مرجح الجملة

G هو كذلك مرجح الجملة

مركز المسافات المتناسبة ومركز الثقل

مركز المسافات المتناسبة G لثلاث نقط A ، B و C هو مرجح الجملة $\{(A; \alpha); (B; \alpha); (C; \alpha)\}$
 مركز المسافات المتناسبة G لثلاث نقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة هو مركز ثقل المثلث ABC .
 النقطة G تحقق: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

البرهان:

العبرة التحليلية للمرجح

المستوي المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن النقط $A(x_A; y_A)$ ، $B(x_B; y_B)$ و $C(x_C; y_C)$ من المستوي.
 إحداثيات المرجح G للجملة $\{(A; \alpha); (B; \alpha); (C; \gamma)\}$ هي:

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{و} \quad x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

البرهان:

مثال: $A(-1; 3)$ ، $B(2; 4)$ و $C(1; -2)$ ثلاث نقط من المستوي. إحداثيات المرجح G للجملة $\{(A; 1); (B; 2); (C; 3)\}$ هي:

| المعرفة | الطريقة |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| كيف تنشئ المرجح ؟ | <ul style="list-style-type: none"> هندسيا ، نظرية طاليس شعاعيا ، بعلاقة شعاعية تحليليا ، بتعيين إحداثياته في معلم |
| كيف نثبت أن نقطة هي مرجح لنقط مثقلة ؟ | <ul style="list-style-type: none"> وضع العلاقة الشعاعية التي تُعرف هذا المرجح |
| كيف نثبت أن ثلاث نقط على استقامة واحدة ؟ | <ul style="list-style-type: none"> بين أن إحدى هذه النقط مرجح للنقطتين الأخرين |
| تعيين مجموعة نقط ؟ | <ul style="list-style-type: none"> حاول اختصار $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$ بالشعاع $\vec{MG}(\alpha + \beta + \gamma)$ أو باستعمال علاقة شال في حالة عدم وجود المرجح |
| كيف نثبت أن مستقيمتا تتقاطع ؟ | <ul style="list-style-type: none"> تحقق أن هذه المستقيمتا تشمل مراجيح جزئية مختلفة لنفس النقط المثقلة : عندئذ ، نقطة التلاقي هي مرجح هذه النقط |

تمارين و مسائل للتعمق

...

حل تمارين و إرشادات

...