2013

الدرس الثالث

الدالة الأسية

إعداد : الأستاذ كمال. حامدي

3

ثانوية العربي بن مهيدي _ العلمة

3

المحتوى

نشاط : طريقة Euler لإنشاء منحنى الدالة الأسية

تذكير بمفهوم التقريب التآلفي: f دالة معرفة على مجال مفتوح I

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند x_0 من I فإنه من أجل كل عدد حقيقي h قريب من 0 حيث $x_0 + h$ ينتمي إلى I لدينا :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

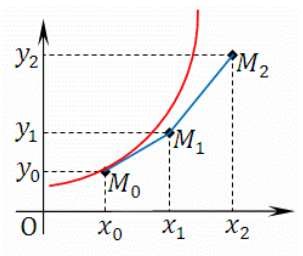
يُسمى $f(x_0) + hf'(x_0)$ التقريب التآلفي لـ $f(x_0 + h)$ من أجل h قريب من 0.

طريقة أولر (Euler)

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. نُسمي $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

تسمح لنا طريقة أولر، ابتداءً من النقطة المعلومة $M_0(x_0; y_0)$ من المنحنى $(\mathcal{C})$ و بمعرفة f' الدالة المشتقة للدالة f، بإنشاء تمثيل تقريبي للمنحنى $(\mathcal{C})$.

نختار h عددا حقيقيا موجبا تماما و قريبا من الصفر.



1. نُنشئ النقطة $M_0(x_0; y_0)$

   نضع: $x_1 = x_0 + h$، إذن : $f(x_1) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

   و بوضع: $y_1 = y_0 + hf'(x_0)$ نُنشئ النقطة $M_1(x_1; y_1)$

   نضع: $x_2 = x_1 + h$، إذن: $f(x_2) \approx f(x_1) + hf'(x_1)$.

   و بوضع: $y_2 = y_1 + hf'(x_1)$ نُنشئ النقطة $M_2(x_2; y_2)$

   و هكذا... نتبع نفس الطريقة لإنشاء النقط $M_3(x_3; y_3)$، ...، $M_n(x_n; y_n)$

   حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = y_{n-1} + hf'(x_{n-1})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

2. نُنشئ القطع المستقيمة $[M_0M_1]$، $[M_1M_2]$، ...$[M_{n-1}M_n]$ و نحصل على خط مضلع (منكسر) .

و كل ما كان h قريبا من الصفر يكون الخط المضلع قريبا من المنحنى $(\mathcal{C})$.

استعمال مجدول Excel

	A	B
1	h=	0,5
2	Xi	Yi
3	-3	
4	=A3+$B$1	
5		
6		
7		=A3+$B$3

في ورقة حساب لمجدول، نحسب القيم التقريبية للدالة f من أجل $h = 0,5$.

كما هو مبيّن في الشكل على الهامش، نكتب قيم العدد الحقيقي x_i في العمود A، ثمّ نحسب في العمود B، القيم y_i.

نُسجل قيمة h في الخلية B1.

- نحجز في الخلية A3 العدد -3 و في A4 العلاقة $\boxed{= A3 + \$B\$1}$

(يُستعمل الرمز $ لتثبيت محتوى الخلية B1)، نحدد الخلية A4 و باستعمال الزالق نسحب إلى الأسفل حتى يظهر العدد 3.

- في الخلية B9 نحجز العدد 1.

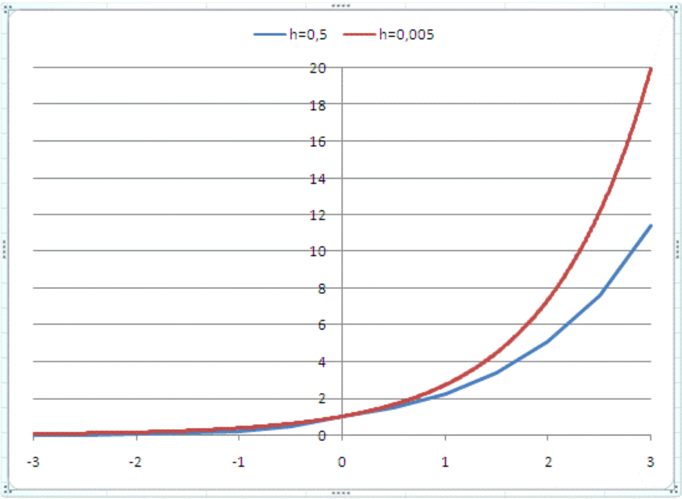
في الخلية B10 نحجز العلاقة $\boxed{= B9 * (1 + \$B\$1)}$ نحدد هذه الخلية و نسحب إلى الأسفل

في الخلية B8 نحجز العلاقة $\boxed{= B9 * (1 - \$B\$1)}$ نحدد هذه الخلية و نسحب إلى الأعلى

فنحصل على الجدول على الهامش.

	A	B
1	h=	0,5
2	Xi	Yi
3	-3	0,015625
4	-2,5	0,03125
5	-2	0,0625
6	-1,5	0,125
7	-1	0,25
8	-0,5	0,5
9	0	1
10	0,5	1,5
11	1	2,25
12	1,5	3,375
13	2	5,0625
14	2,5	7,59375
15	3	11,390625

- نُعيد نفس العملية بأخذ الخطوة $h = 0,005$.
- باستعمال مساعد راسم البيانات للمجدول، نحصل على التمثيلين البيانيين التاليين



خواص الدالة f

1. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) \times f(-x)$
   أ) بين أن h دالة ثابة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) \times f(-x) = 1$
   ب) برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) \neq 0$
2. نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g' = g$ و $g(0) = 1$. بما أن الدالة f لاتنعدم على $\mathbb{R}$ نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.
   أ) بين أن k دالة ثابة على $\mathbb{R}$.
   ب) استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x) = f(x)$
3. ليكن y عدد حقيقي ثابت. نعتبر الدالة l المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $l(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$
   أ) بين أن l دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $l(x) = f(y)$.
   ب) استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x+y) = f(x) \times f(y)$
   ج) استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$
4. ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\varphi(x) = \frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$
   أ) عين الدالة المشتقة للدالة φ
   ب) استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx) = [f(x)]^n$

تعاريف و خواص الدالة الأسية

وُجود الدالة الأسية

مبرهنة

توجد دالة وحيدة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x) = f(x) \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

هذه الدالة يُرمز لها بالرمز $x \mapsto \exp(x)$ و تُسمّى الدالة الأسية

نقبل دون برهان وُجود الدالة الأسية

خاصية : الدالة الأسية لا تنعدم في $\mathbb{R}$, أي من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x) \neq 0$

البرهان : لتكن الدالة φ المعرفة بـ : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$

لنثبت أنّ الدالة φ ثابتة, لذلك مشتق φ هي الدالة المعرفة بـ :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)\square$$

و بما أنّ $f' = f$ فإنّ :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x)f'(-x) - f(x)f'(-x)\\ &= 0\square\end{aligned}$$

$\varphi' = 0$ إذن الدالة φ ثابتة ، و منه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\varphi(x) = \varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1\square$$

نستنتج إذن : $f(x)f(-x) = 1$ ، و عليه الدالة f لا تنعدم في $\mathbb{R}$

النتيجة : من أجل كل عدد حقيقي x $\exp(x) \neq 0$

خاصية : الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$, أي من أجل كل عدد حقيقي x $\exp(x) > 0$

البرهان : نعلم أنّ

- من أجل كل عدد حقيقي x $\exp(x) \neq 0$
- $\exp(0) = 1 > 0$
- الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن، إذا وُجد عدد حقيقي a حيث $\exp(a) < 0$ فإنّه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يُوجد عدد حقيقي c حيث $\exp(c) = 0$ و هذا يُناقض أنّ الدالة exp لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

النتيجة : الدالة exp موجبة تماما على $\mathbb{R}$

النتائج

الدالة الأسية التي يُرمز لها exp

- معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- $\exp(0) = 1$
- من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x) > 0$
- الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\exp'(x) = \exp(x)$

العلاقة الأساسية

مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

البرهان

نعتبر الدالة h المعرفة بـ : $h(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)}$

و لنثبت أنّ الدالة h ما هي إلاّ الدالة الأسية. يكفي إذن أن نبرهن أن $h' = h$ و $h(0) = 1$:

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(x)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)} = h(x)$$

$$h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(0)} = 1$$

الدالة h هي إذن الدالة الأسية، و منه نستنتج

$\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x)$ أي $\exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$ $\square$

خواص أخرى

مبرهنة

a و b عددان حقيقيان و n عدد طبيعي، لدينا الخواص التالية

- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(-a)}$
- $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$

ترميز آخر للدالة الأسية

تعريف يُرمز إلى العدد الحقيقي $\exp(1)$ بالرمز e

العدد e هو العدد الحقيقي غير الناطق، $\mathrm{e} \simeq 2{,}718\ldots$

نضع من أجل كل عدد حقيقي x، $\mathrm{e}^x = \exp(x)$ و نحصل على الخواص التالية: من أجل كل عددان حقيقيان a و b

- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$
- $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

تطبيقات

تطبيق 1 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$f(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$$
أثبت أنّ f دالة ثابتة
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،
$$\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x}}$$
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \geqslant 0$

تطبيق 2 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2}{1 - \mathrm{e}^{2x}}$

1. عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أثبت أنّه من أجل كل $x \in D_f$، لدينا: $f(x) = \frac{2\mathrm{e}^{-2x} + 1}{\mathrm{e}^{-2x} - 1}$
3. أحسب، من أجل كل $x \in D_f$: $f(-x) + f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا

دراسة الدالة الأسية و نهايات التزايد المقارن

اتجاه تغيّر الدالة الأسية

مبرهنة الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

لأنّ $\exp'(x) = \exp(x)$ ومن أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x) > 0$

نتائج

- مهما يكن العدد الحقيقي k الموجب تماما، المعادلة $e^x = k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.
- من أجل كل عددين حقيقيين a و b:

$$a = b \iff e^a = e^b$$
$$a < b \iff e^a < e^b$$
$$a > b \iff e^a > e^b$$

تنبيه
خاصية الدالة المتزايدة تماما
(الدالة المتزايدة تُحافظ على الترتيب)

النهايات و التمثيل البياني

تطبيق 3 نهاية الدالة الأسية عند $+\infty$

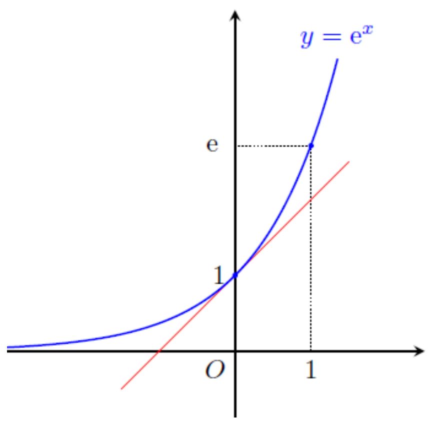
1. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - x$
   (أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها. ما هي أصغر قيمة للدالة f ؟
   (ب) استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$
2. باستبدال المتغيّر، عيّن النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

مبرهنة

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

جدول التغيرات و التمثيل البياني

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$



محور الفواصل هو مقارب لمنحنى الدالة الأسية عند $-\infty$

تطبيقات

تطبيق 4 حل معادلات و متراجحات

في كل حالة، حل المعادلة أو المتراجحة المقترحة:

(1) $e^{5x} = 1$ **(2)** $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ **(3)** $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$ **(4)** $e^{x^2} = (e^2)^3 e^{-x}$

(5) $5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$ **(6)** $e^{x^2} \leqslant \frac{1}{e^2}$ **(7)** $3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0$ **(8)** $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$

نهايات مهمة

مبرهنة

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\square$$

البرهان :

عيّن العدد المشتق للدالة الأسية عند 0 و استنتج هذه النهاية

التزايد المقارن (مقارنة تزايد e^x و x)

تطبيق 5 نهايات التزايد المقارن

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$
   (أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.
   (ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$، $g(x)>0$
   (ب) استنتج النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$
4. باستبدال المتغيّر، عيّن النهاية $\lim_{x\to-\infty}xe^x$

مبرهنة

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0\square$

و من أجل كل عدد طبيعي $n>0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0\square$

مشتق الدالة e^u

مبرهنة

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة e^u، التي يرمز لها $\exp\circ u$، هي كذلك قابلة للاشتقاق على I و من أجل كل عدد حقيقي من I،

$$(e^u)'(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}\square$$

البرهان : (حسب مبرهنة مشتق مركب دالتين)

تطبيق 6 حساب نهايات

أحسب النهايات المقترحة للدالة f

(1) $f(x)=x-e^x$ عند $+\infty$، عند $-\infty$

(2) $f(x)=\frac{2e^x+1}{e^x+1}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$

(3) $f(x)=(1-5x)e^{-x}$ عند $+\infty$

(4) $f(x)=\frac{e^{-2x}}{2-e^{-x}}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$

(5) $f(x)=2e^{2x}-e^x+1$ عند $+\infty$، عند $-\infty$

(6) $f(x)=e^x-xe^{-x}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$

(7) $f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$ عند 0، عند $+\infty$، عند $-\infty$

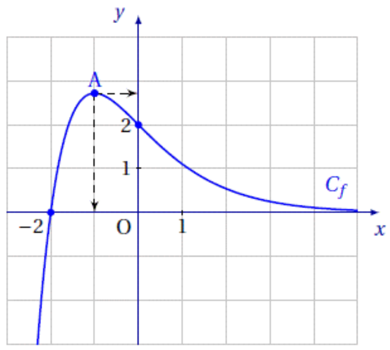
(8) $f(x)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ عند $+\infty$، عند $-\infty$

تطبيق 7 تعيين عبارة دالة

التمثيل البياني هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ حيث a و b عددان حقيقيان

1. استعمل هذا الشكل لحساب العددين a و b.
2. أحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x

و استنتج إحداثيات النقطة A المناسبة للقيمة الحدية الكبرى للدالة f.



المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

ملاحظة

يُؤدي العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الاقتصاد، الكهرباء و الميكانيك إلى دراسة هذا النوع من المعادلات التفاضلية و التي غالبا ما تكتب على الشكل :
$\frac{dx}{dt} = at + b$

تعريف

حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $(a \neq 0)$ هو تعيين كل الدوال القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = af(x) + b$

حل المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$

مبرهنة

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $(a \neq 0)$ هي الدوال f_k المعرفة بـ: $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ حيث k عدد حقيقي ثابت كيفي

البرهان:

نعتبر المعادلة التفاضلية: (E) $y' = ay$ مع $(a \neq 0)$

1. أثبت أنّ الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ حيث k عدد حقيقي هي حل للمعادلة (E).
2. نفرض أن g حل آخر للمعادلة التفاضلية (E). أثبت أنّ الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = \mathrm{e}^{-ax}g(x)$ دالة ثابتة. استنتج أنّ $g(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ حيث k عدد حقيقي ثابت كيفي.

تطبيق 8 حل معادلة تفاضلية

حل، في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 0$

حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$

مبرهنة

a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال f_k المعرفة بـ $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي ثابت كيفي.

البرهان:

نعتبر المعادلة التفاضلية: (E') $y' = ay + b$ مع $(a \neq 0)$

1. أثبت أنّ الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي كيفي هي حل للمعادلة (E').
2. نفرض أن g حل آخر للمعادلة (E') و لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = g(x) + \frac{b}{a}$

أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $h'(x) = ah(x)$

3. استنتج من مبرهنة الجزء الأول عبارة $h(x)$ و من ثمّ عبارة $g(x)$.

تطبيق 9 حل معادلة تفاضلية

حل، في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 3$

خاصية :

من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0; y_0)$ ، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ (مع $a \neq 0$) تقبل، على $\mathbb{R}$ ، حلا وحيدا f حيث: $f(x_0) = y_0$

تطبيق 10 حل معادلة تفاضلية

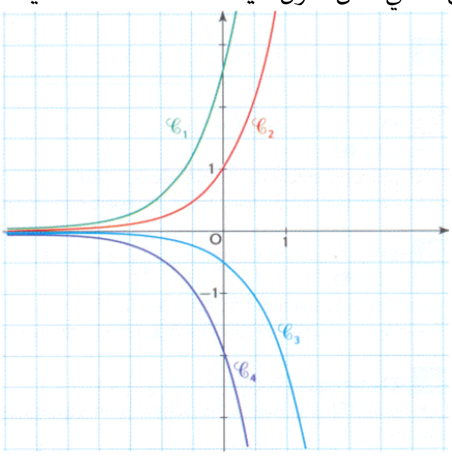
نعتبر المعادلة التفاضلية (E) $\quad 2y' + 3y = 0$

1. حل المعادلة (E)
2. عيّن الحل f للمعادلة (E) بحيث $f(1) = 2$

أدرس تغيّرات الدالة f ثمّ أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

تطبيق 11 حل معادلة تفاضلية

المنحنيات الأربعة الممثلة في الشكل التالي تُمثل حلول، في $\mathbb{R}$، للمعادلة التفاضلية: $\frac{1}{2}y' - \frac{3}{4}y = 0$



1. حل، في $\mathbb{R}$، هذه المعادلة.
2. عيّن معادلة لكل من المنحنيات $\mathcal{C}_1$ ، $\mathcal{C}_2$ ، $\mathcal{C}_3$ ، $\mathcal{C}_4$

تطبيق 12 حل معادلة تفاضلية

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) $\quad y' + 2y = 1$

1. حل المعادلة (E).
2. عيّن الحل f للمعادلة (E) بحيث $f(-1) = 2$
3. أدرس تغيّرات الدالة f ثمّ أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

تمارين و مسائل للتعمق

...

حل تمارين و إرشادات

...