الدالة الأسية النيبرية

تعريف:

الدالة الأسية النيبرية هي الدالة الوحيدة f المعرّفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق: $f' = f$ و $f(0)=1$.

نرمز لها بالرمز : exp .

يوجد عدد حقيقي نرمز له بالرمز e و يحقق: $exp(1)=e$ و يقارب $2,718$.

اصطلاحا نكتب من أجل كل عدد حقيقي x : $exp(x)=e^x$

ويكون : $e^1=e$; $e^0=1$ و من أجل كل متغير حقيقي x : $(e^x)'=e^x$

الخاصية الأساسية للدالة الأسية النيبرية و نتائجها:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $\boxed{e^{x+y}=e^x\times e^y}$.

باستعمال الخاصية الأساسية نبرهن الخواص التالية:

1) عندما يكون: $x=y$ تكتب الخاصية الأساسية: $\boxed{e^{2x}=\left(e^x\right)^2}$

و يمكن تعميم النتيجة: من أجل: $n\in\mathbb{N}$: $\boxed{e^{nx}=\left(e^x\right)^n}$

2) لدينا: $e^0=1$ و بالتالي: $e^{x+(-x)}=1$ إذن: $\boxed{e^x\times e^{-x}=1}$

ومن هذه الخاصية نستنتج أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x\neq 0$

3) من أجل كل عددين حقيقيين x و y :

$$\boxed{\begin{aligned} e^{x-y}&=e^x\times e^{-y}\\ &=\frac{e^x}{e^y}\end{aligned}}$$

4) باستعمال الخاصية الأساسية و بملاحظة أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $x=2\left(\frac{x}{2}\right)$ نكتب:

$e^x=e^{2\left(\frac{x}{2}\right)}$ أي: $\boxed{e^x=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}$ و بالتالي نستنتج أنّ:

أ) من أجل كل عدد حقيقي x : $\boxed{e^x>0}$. و بالتالي الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x : $\boxed{\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}}$

5) f و g دالتان معرّفتان على D_f و D_g على الترتيب. بما أنّ الدالة الاسية النيبرية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ:

أ) $e^{f(x)}=e^{g(x)}$ معناه $f(x)=g(x)$

ب) $e^{f(x)}<e^{g(x)}$ معناه $f(x)<g(x)$

حساب نهايات الدالة الأسية النيبرية عند حدود مجال تعريفها و التمثيل البياني:

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=e^x-x$

1) أ) بيّن أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ، ثمّ احسب $f'(x)$ ، محدّدا إشارتها.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ج) احسب $f(0)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x > x$.

2) معتمدا على مبرهنة النهاية بالمقارنة، أثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

3) معتمدا على خواص الدالة الأسية النيبرية ، أثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

4) **أنجز جدول تغيرات الدالة الأسية النيبرية ثمّ أنشئ منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$

حل:

1) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ كمجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على هذا المجال .

من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=e^x-1$

إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ مبيّنة في الجدول التالي:

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
e^x-1	$+$

ب) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

ج) حساب $f(0)$:

$f(0)=1$ و بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$، فإنّ : $x\geq 0$ معناه $f(x)\geq f(0)$ و بالتالي:

إذا كان $x\geq 0$ فإنّ $f(x)\geq 1$. و منه:

إذا كان $x\geq 0$ فإنّ $f(x)>0$

فإنّ $e^x-x>0$

أي: $\boxed{e^x>x}$ و هو المطلوب.

2) بما أنّ من أجل $x\geq 0$: $e^x>x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ فحسب مبرهنة النهاية بالمقارنة يكون: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty}$

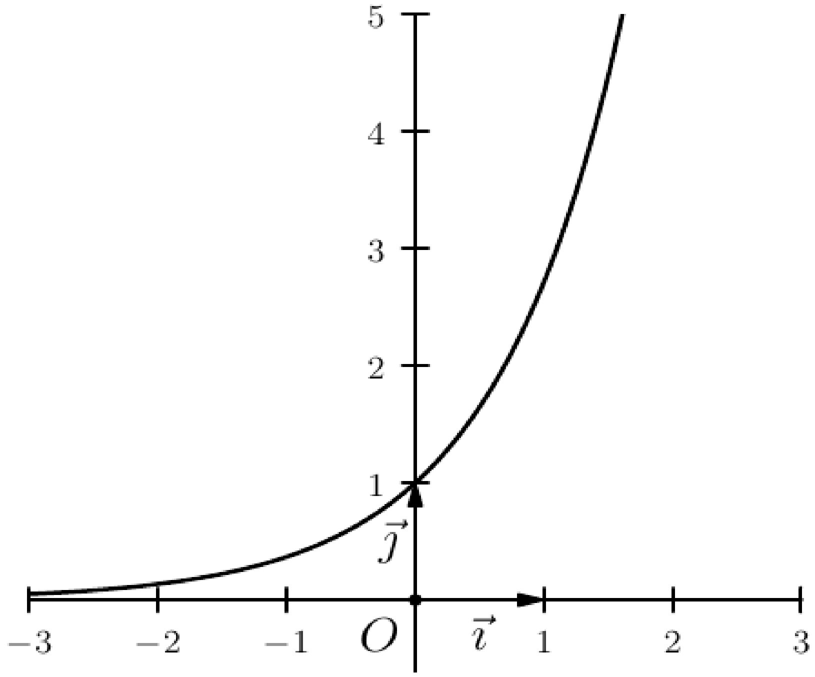
3) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}$ و بوضع $y=-x$ نكتب:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{e^y}$ و منه: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

4) جدول تغيرات الدالة الاسية النيبرية و التمثيل البياني:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

التمثيل البياني:



نتائج:

1) أ) **نهاية الدالة المركبة :** $x \mapsto e^{f(x)}$: α يمثل عددا حقيقيا أو $(+\infty)$ أو $(-\infty)$,

بالاعتماد على نهايتي الدالة الأسية النيبرية نستنتج نهايات الدالة المركبة : $x \mapsto e^{f(x)}$ المبينة في الجدول التالي:

$\lim\limits_{x\to\alpha} e^{f(x)}$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$
0	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
e^l	$l(l\in\mathbb{R})$

ب) النهاية: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$

الدالة الأسية قابلة للاشتقاق في كل قيمة حقيقية a و بالتالي:_ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$

حالة خاصة: من أجل $a=0$: نكتب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

2) **الدالة المشتقة للدالة المركبة:** $x \mapsto e^{f(x)}$

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$، فإنّ الدالة g المعرّفة بالعبارة: $g(x)=e^{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$

مثال:

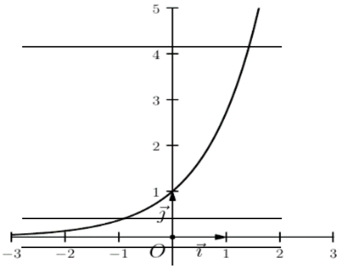
f الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;1[$ بالعبارة: $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ قابلة للاشتقاق على هذا المجال و لدينا:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$$

اللوغاريتم النيبيري لعدد حقيقي موجب تماما

k عدد حقيقي. المعادلة ذات المجهول x : $e^x = k$، لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان $k \leq 0$ وتقبل حلا وحيدا إذا كان $k > 0$. و باستعمال المنحنى البياني للدالة الأسية النيبرية، نلخص إشارة الحل في الجدول الآتي:

قيّم k	إشارة الحل
$k \in]0;1[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
$k = 1$	المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما
$k \in]1;+\infty[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا



ترميز: حل المعادلة $e^x = k$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $\ln(k)$: $\ln$ يرمز للوغاريتم النيبيري.

ونكتب من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما k:

$e^x = k$ معناه $x = \ln(k)$

مثال1 :

حل في مجموعة الاعداد الحقيقية المعادلة ذات المجهول x : $e^{3x+1} = 4$

$e^{3x+1} = 4$ معناه $3x+1 = \ln(4)$

معناه $x = \dfrac{\ln(4)-1}{3}$

مثال 2:

حل في مجموعة الاعداد الحقيقية المعادلة: $2e^x - e^{-x} + 1 = 0$

$2e^x - e^{-x} + 1 = 0$ معناه $2e^x - \dfrac{1}{e^x} + 1 = 0$

معناه $\dfrac{2e^{2x} + e^x - 1}{e^x} = 0$

معناه $2e^{2x} + e^x - 1 = 0$

معناه $2(e^x)^2 + e^x - 1 = 0$

معناه $\begin{cases} y = e^x ; y > 0 \\ 2y^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$

معناه $y = \dfrac{1}{2}$

معناه $x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

المعادلات التفاضلية من الشكل: $y' = ay + b$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ حيث: $a \neq 0$ هي الدوال العددية y المعرّفة بالعبارة: $y(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية : $y' = 2y - 3$

حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال من الشكل: $y(x) = Ce^{2x} + \dfrac{3}{2}$

حساب النهاية: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$

1) أ) f' هي الدالة المشتقة للدالة f على المجال $[0;+\infty[$.احسب $f'(x)$.

ب) f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f على $[0;+\infty[$.احسب $f''(x)$ و حدّد إشارتها على المجال $[0;+\infty[$

ج) حدّد اتجاه تغير الدالة f' على المجال $[0;+\infty[$

2) عيّن إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أ) بيّن أنّه من أجل $x \geq 0$ فإنّ: $e^x > \dfrac{1}{2}x^2$

ب) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

حل:

1) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x) = e^x - x$

ب) الدالة f' قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و لدينا: $f''(x) = e^x - 1$. من أجل $x \geq 0$: $f''(x) \geq 0$.

ج) الدالة f' متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;+\infty[$: بما أنّ f' متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$،فإنّ $f'(x) \geq f'(0)$

أي $f'(x) \geq 1$ و بالتالي من أجل $x \geq 0$: فإنّ: $f'(x) > 0$.

نستنتج أنّ: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3) أ) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي: $f(x) \geq f(0)$ أي: $f(x) > 0$.

إذن: $e^x - \dfrac{1}{2}x^2 > 0$ أي: $e^x > \dfrac{1}{2}x^2$

ب) من النتيجة السابقة: $e^x > \dfrac{1}{2}x^2$ نكتب: $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{1}{2}x$ و بما أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$ ، فإنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

1) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$e^{x^2+3x-3}=e^{2x-1} \quad (1) \qquad \text{و} \qquad e^{5x+3}>e^{3x-1} \quad (2)$$

2) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$e^{2x}-e^{x}-6=0 \quad (3) \qquad \text{و} \qquad e^{2x}-e^{x}-6>0 \quad (4)$$

حل:

المعادلة (1) تعني $x^2+3x-3=2x-1$ أي $x^2+x-2=0$ و حلي هذه المعادلة هما 1 و -2.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن $S=\{-2;1\}$.

المتراجحة (2) تعني $5x+3>3x-1$ أي $x>-2$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن $S=]-2;+\infty[$.

المعادلة (3) تصبح بوضع $y=e^x$: $y^2-y-6=0$. لدينا $\Delta=25$ و $y'=-2$ و $y''=3$.

- ➢ $e^x=-2$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ لأن $e^x>0$.
- ➢ $e^x=3$ تعني $x=\ln 3$.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن: $S=\{\ln 3\}$.

المتراجحة (4) تصبح بوضع $y=e^x$: $y^2-y-6>0$.

y	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y^2-y-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة $y^2-y-6>0$ هي إذن الأعداد الحقيقية y بحيث: $y<-2$ أو $y>3$.

- ➢ $e^x<-2$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن $e^x>0$.
- ➢ $e^x>3$ تعني $x>\ln 3$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن: $S=]\ln 3;+\infty[$.

التمرين الثاني:

1) f_1 حلٌّ للمعادلة التفاضلية $y'=2y+4$ و الذي يحقق $f_1(0)=3$. عيّن عبارة f_1

2) f_2 حلٌّ للمعادلة التفاضلية $y'=y$ و الذي يحقق $f_2(0)=-3$. عيّن عبارة f_2

3) احسب $\lim_{x\to-\infty}(f_1(x)+f_2(x))$ ، $\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)+f_2(x))$

حل:

1) عبارة f_1 :

$y'=2y+4$ معناه $y(x)=Ce^{2x}-2$

لدينا إذن: $f_1(x)=Ce^{2x}-2$ و $f_1(0)=3$ و بالتالي : $\boxed{f_1(x)=5e^{2x}-2}$.

2)عبارة f_2 :

$y'=y$ معناه $y(x)=C'e^{x}$

لدينا إذن: $f_2(x)=C'e^{x}$ و $f_2(0)=-3$ و بالتالي : $\boxed{f_2(x)=-3e^{x}}$.

3)حساب $\lim_{x\to-\infty}(f_1(x)+f_2(x))$:

$$\lim_{x\to-\infty}(f_1(x)+f_2(x))=\lim_{x\to-\infty}(5e^{2x}-2-3e^{x})=-2$$

التمرين الثالث:

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=2x-1-e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) جد: $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

ب) احسب $f'(x)$ ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f

2) برهن أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ) بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,72<\alpha<0,74$

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

4) أنشئ المنحنى (C_f)

II) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=4x^3-3x^2+6(x+1)e^{-x}$

1) بيّن أنّه من اجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=6xf(x)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

2) بيّن أنّ : $g(\alpha)=4\alpha^3+9\alpha^2+6\alpha-6$

حل:

1) أ) حساب النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ب) حساب $f'(x)$: $f'(x)=2+e^{-x}$. من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)>0$

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ج) جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

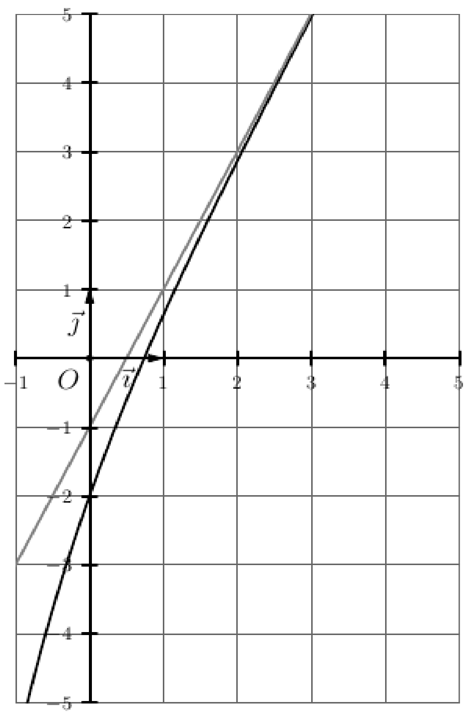
ومنه المستقيم (d) هو مقارب مائل للمنحى عند $+\infty$

3) أ) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,72<\alpha<0,74$

لدينا:

الدالة f معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0.72,0.74]$ و $f(0.72)\times f(0.74)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث $f(\alpha)=0$.



ب). استنتاج إشارة $f(x)$:

من أجل $x\in]-\infty,\alpha[$ ، $f(x)<0$

من أجل $x\in]\alpha,+\infty[$ ، $f(x)>0$

الانشاء:

1) بيان أنّه من اجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=6xf(x)$

$g(x)=4x^3-3x^2+6(x+1)e^{-x}$ ،

$$g'(x)=12x^2-6x+6e^{-x}-6(x+1)e^{-x}$$

$$g'(x)=12x^2-6x+6e^{-x}-6xe^{-x}-6e^{-x}$$

$$g'(x)=6x(2x-1-e^{-x})=6xf(x)$$

إنّ إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$ مبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	

2) إثبات أن: $g(\alpha)=4\alpha^3+9\alpha^2+6\alpha-6$

لدينا من الجزء الأول: $f(\alpha)=2\alpha-1-e^{-\alpha}$ ومنه $2\alpha-1=e^{-\alpha}$

$g(\alpha)=4\alpha^3-3\alpha^2+6(\alpha+1).e^{-\alpha}$

وبالتالي: $g(\alpha)=4\alpha^3-3\alpha^2+6(\alpha+1).(2\alpha-1)$

$g(\alpha)=4\alpha^3+9\alpha^2+6\alpha-6$

التمرين الرابع:

f الدالة العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{(1-x)e^x+x+1}{e^x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل: $f(x)=-x+\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

ب) بيّن أنّ الدالة f فردية و فسّر النتيجة بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل: $f(x)=-x+1+\dfrac{2}{e^x-1}$

ب) احسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$

ج) برّر أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y=-x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$.

د) حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d).

3) احسب $f'(x)$ و شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$.

4) أ) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $1\le x_0\le 2$.

ب) أنشئ المنحنى (C_f) و مستقيماته المقاربة.

ج) m وسيط حقيقي. باستعمال المنحنى (C_f)، ناقش حسب قيّم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$m-1=\frac{2}{e^x-1}$$

حل:

1) أ) تبيين أنّه يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل: $f(x)=-x+\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

لدينا: $f(x)=\dfrac{(1-x)e^x+x+1}{e^x-1}$. و بالتالي:

$$f(x)=\frac{e^x-xe^x+x+1}{e^x-1}=\frac{(e^x+1)-x(e^x-1)}{e^x-1}=-x+\frac{e^x+1}{e^x-1}.$$

ب) تبيين انّ الدالة f فردية على $\mathbb{R}^*$:

(مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة للصفر و $f(-x)=-f(x)$)

$D_f=\mathbb{R}^*$ و بالتالي : إذا كان $x\in D_f$ فإنّ $(-x)\in D_f$

و كذلك:

$$f(-x)=x+\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$$

$$f(-x)=x+\frac{e^{x}+1}{1-e^{x}}$$

$$f(-x)=x-\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$$

$$f(-x)=-(-x+\frac{e^{x}+1}{1-e^{x}})$$

$$f(-x)=-f(x)$$

و منه الدالة f فردية على $\mathbb{R}^*$. يكفي دراستها على المجال $]0,+\infty[$ و منحناها البياني متناظر بالنسبة لمبدا المعلم.

2) أ) تبيين أنّ يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل: $f(x)=-x+1+\frac{2}{e^{x}-1}$

لدينا: $f(x)=-x+\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=-x+\frac{e^{x}-1+2}{e^{x}-1}=-x+1+\frac{2}{e^{x}-1}$.

ب) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ج) تبرير أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=-x+1$ مقارب للمنحنى بجوار $(+\infty)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}-1}=0$

دراسة الوضعية:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(-x+1)=\frac{2}{e^{x}-1}$

و بالتالي إذا كان $x<0$ المنحى (C_f) تحت مستقيمه المقارب المائل.

إذا كان $x>0$ المنحنى (C_f) فوق مستقيمه المقارب المائل.

1) حساب $f'(x)$:

الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، و عبارة دالتها المشتقة تعطى بـ:

$f'(x)=-1-\frac{2e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$.و لدينا: $f'(x)<0$.

جدول التغيرات:

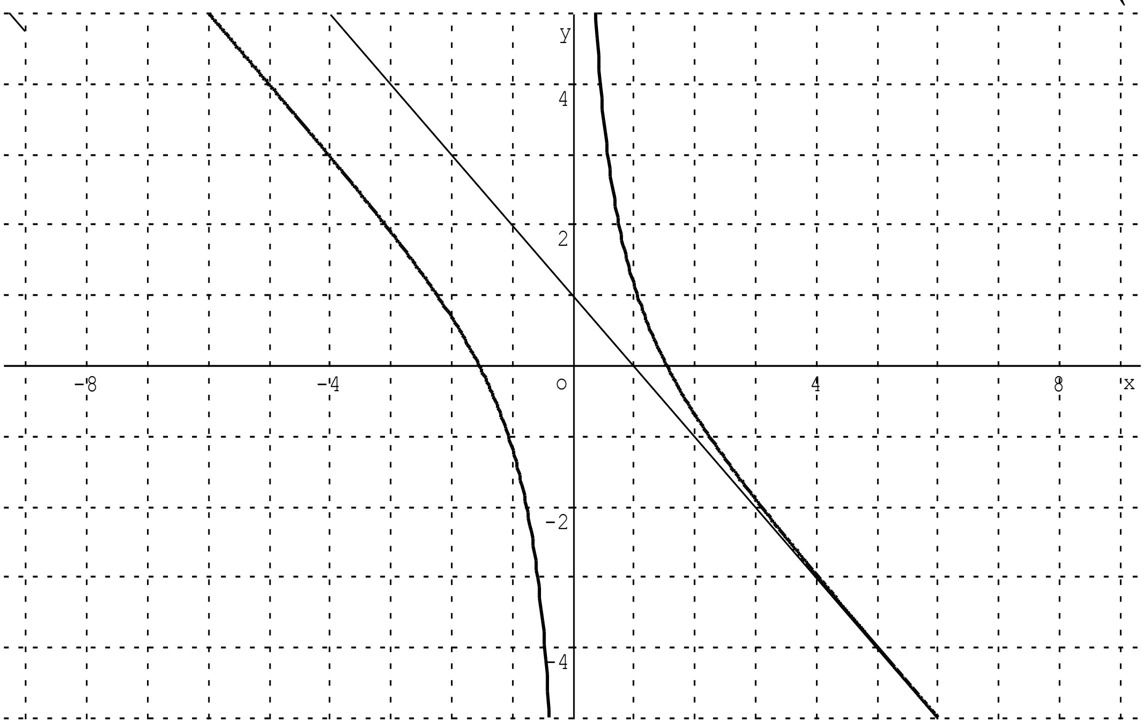
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2) تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $1 \le x_0 \le 2$.

تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث: $1 \le x_0 \le 2$:

الدالة f مستمرة ،متزايدة تماما على المجال $[1,2]$ و $f(1)=1.16$ ، $f(2)=-0.69$

5)الانشاء



المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة: $m-1=\dfrac{2}{e^x-1}$

المعادلة $m-1=\dfrac{2}{e^x-1}$ تكافئ $m=1+\dfrac{2}{e^x-1}$ و منه $-x+m=-x+1+\dfrac{2}{e^x-1}$ أي: $f(x)=-x+m$

حلول المعادلة هي إذن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=-x+m$ (توازي المستقيمين المقاربين المائلين)

قيّم m	عدد و إشارة الحلول
$m\in[-1;1]$	المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$
$m\in]-\infty;-1[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
$m\in]1;+\infty[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$

1) احسب: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to 0} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g.

3) برهن أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

4) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0,1]$ بـ: $f(x)=\frac{1+x}{1+e^{x}}$

1) برهن أنّ: $f(\alpha)=\alpha$

2) برهن أنّه من أجل $x\in[0;1]$ فإنّ: $f'(x)=-\frac{xg(x)}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;1]$ و شكّل جدول تغيرات الدالة f.

التمرين الثاني:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=2x+\frac{4}{e^{x}+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]$ استنتج وجود مستقيمين مقاربين للمنحنى (C_f).

2) بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنّ: $f'(x)=2\left[\frac{e^{2x}+1}{(e^{x}+1)^{2}}\right]$

3) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.

4) أ) احسب $f(-x)-4$. ماذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f ؟

ب) احسب $f(3)$ ثم استنتج قيمة $f(-3)$.

ج) عين معدلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 0.

5) بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1.71;-1.67[$ حلا وحيدا α.

6) أنشئ بدقة المماس (Δ) و المنحنى (C_f).

التمرين الثالث:

أ) g الدالة العددية المعرّفة على $[0,+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=x^3+x^2+x-1$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة g .

3) برهن أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;1]$.استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيّم x .

ب) f الدالة العددية المعرّفة على $[0,+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)e^x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.

2) احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة f ثمّ أنجز جدول تغيراتها.

3) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) نأخذ $\alpha=0,54$ و $f(\alpha)=0,24$.أنشئ المنحنى (C) .

5) h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $h(x)=\dfrac{|x|e^{-|x|}}{(x^2+1)}$

(C') تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدالة h زوجية على $\mathbb{R}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ب) أنشئ المنحنى (C') انطلاقا من المنحنى (C).

التمرين الرابع:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{4\left(1-e^x\right)}{1+e^x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f فردية، فسّر النتيجة هندسيا.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$

3) احسب نهايات الدالة على حدود مجال تعريفها، ثمّ استنتج معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f).

4) أكتب معادلة (Δ) المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

5) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=2x+f(x)$.

أ) أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g'(x)$.

ب) أنجز جدول تغييرات الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

ج) استنتج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)، ماذا تستنتج؟

6) أنشئ (Δ) و (C_f).

التمرين الخامس:

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\left[-2;2\right[$ بالعبارة: $g(x)=4+(x-2)^3e^{-x}$

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=(5-x)(x-2)^2e^{-x}$ ، ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$.

ب)احسب $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$. أنجز جدول تغيرات الدالة g .

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\left[-2;2\right[$.تأكد أنّ $\alpha\in\left[0,2;0,3\right]$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\left[-2;2\right[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\left[-2;2\right[$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x}{x-2}+e^{-x}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهاية الدالة f عند 2 ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[-2;2\right[$ ، احسب $f'(x)$.

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f .

ج) بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

د) نعتبر $\alpha=0,27$ ،أنشئ بدقة المنحنى (C).

3) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-2;2\right[$ بالعبارة: $h(x)=f\left(|x|\right)$

أ) بيّن أنّ الدالة h زوجية على $\left]-2;2\right[$.

ب) أنشئ المنحنى الممثل للدالة h في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

التمرين السادس:

1) ادرس إشارة العبارة: $\left(2e^{2x}-5e^{x}+2\right)$ على $\mathbb{R}$.

2) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بالعبارة : $f(x)=1+2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

(ς)تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تأكد أنّه من أجل كل عدد حقيقي xموجب تماما يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=2+2x+\dfrac{1}{e^x-1}$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

ج) بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+2$ مقارب للمنحنى (ς) ، ثمّ أدرس وضعيته بالنسبة للمستقيم (d).

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، احسب $f'(x)$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثمّ أنشئ المنحنى (ς) و مستقيماته المقاربة.

التمرين السابع:

f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(-x)+f(x)=2$؛ استنتج أنّ المنحنى البياني (C) يقبل مركز تناظر يطلب تعيين إحداثييه.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا.

3) أ) احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة f و حدّد إشارتها.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) اكتب معادلة للماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

4) برهن أنّ النقطة $S(0;f(0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

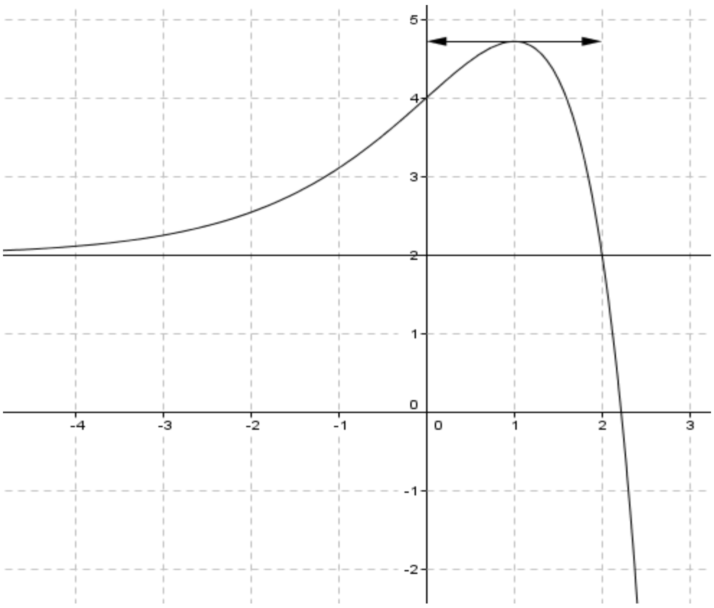
5) أ) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C).

ب) m وسيط حقيقي.

باستعمال المنحنى (C) ناقش حسب قيّم m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$(3-m)e^{x}=1+m$$

التمرين الثامن:



ا) a ، b و c أعداد حقيقية. h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $h(x)=(ax+b)e^{x}+c$

1) احسب بدلالة الأعداد a ، b و c، $h'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة h.

2) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة h في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. حيث:

أ) $B(0;4)$ نقطة من (C).

ب) المماس لـ (C) في النقطة $A(1;h(1))$ مواز لحامل محور الفواصل.

ج) المستقيم ذو المعادلة: $y=2$ مستقيم مقارب لـ (C) بجوار $(-\infty)$.

من خلال هذه المعطيات بيّن أنّ: $h(x)=(-x+2)e^{x}+2$

3) بقراءة بيانية ؛ عيّن حصرا سعته $0,5$ للعدد α الذي يحقق: $h(\alpha)=0$

4) عيّن إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) تأكد أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{xh(x)}{(e^x+1)^2}$

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha(\alpha-2)$ وعيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) أنشئ بعناية المنحنى (C_f).

<u>التمرين التاسع:</u>

f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة f .

3) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) برهن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة : $y=x-\dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$.

ب) هل توجد مماسات للمنحنى (C) توازي المستقيم (d).

5) أ) أنشئ بدقة المستقيم (d) و المنحنى (C).

ب) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $e^{-2x}=2m+1$

ج) تأكد من صحة نتائجك حسابيا.

التمرين العاشر:

أ) a, b, c أعداد حقيقية. f دالة عددية معرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعبارة:
$f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx$، (C) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) المستقيم (d) ذو المعادلة: $y = 2x$ مقارب لـ (C) بجوار $(+\infty)$. عيّن قيمة c .

2) المستقيم (T) ذو المعادلة $y = 2x - \frac{1}{2}$ مماس لـ (C) في النقطة $I(0; -\frac{1}{2})$. عيّن قيمتي a و b.

ب) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + 2x$

1) احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

2) برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $g'(x) = (e^{-x} + 1)(2 - e^{-x})$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة g و شكّل جدول تغيراتها.

4) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (d).

5) برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,2; 0,3[$ و حلا وحيدا β في المجال $]-1,3; -1,2[$

6) أنشئ المنحنى (C).

التمرين الحادي عشر:

n عدد طبيعي غير معدوم. f_n الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$
(C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f_1 عند الحدود المفتوحة من مجال تعريفها. فسّر نتائجك بيانيا.

2) برهن أنّ الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و أنّ : $0 < f_1(x) < 4$ ، من أجل كل عدد حقيقي x .

3) برهن أنّ النقطة $w(\ln 7; 2)$ مركز التناظر للمنحنى (C_1)، ثمّ اكتب معادلة المماس لـ (C_1) في النقطة w .

4) أ) أنشئ المنحنى (C_1) .

ب) أنشئ المنحنى البياني للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = f(|x|)$

5) برهن أنّ كل المنحنيات (C_n) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها.

6) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، المنحنى (C_n) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ في نقطة وحيدة I_n يطلب تعيين فاصلتها.

ب) اكتب معادلة للمماس (T_n) للمنحنى (C_1) في النقطة I_n .

التمرين الثاني عشر:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-3x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{x}$

(C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-3x+\frac{3}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $(-\infty)$.

ج) حدّد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (d).

2) أ)علما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) احسب $f'(x)$ و حدّد إشارتها على $\mathbb{R}$.أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3) أ) احسب $f(0)$ ثمّ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;2[$.

ب) أنشئ المستقيم (d) و المنحنى (C).

4) g الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=f\left(x^{2}\right)$

أ) احسب: $g\left(\sqrt{\alpha}\right)$

ب) g' هي الدالة المشتقة للدالة g .حل في المجال $[0;+\infty[$ المعادلة : $g'(x)=0$

ج) باستعمال مركب دالتين ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0;+\infty[$.