الاستـــمراريـــة:

تعريف: f دالة عددية معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a عدد حقيقي غير معزول من المجال I .

الدالة f مستمرة عند a معناه: $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=f\left(a\right)$

مثال 1: الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f\left(x\right)=x^3+2x-3$ مستمرة عند القيمة 0 لأنّ:من جهة $f\left(0\right)=-3$ و من جهة أخرى: $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=-3$

مثال 2: الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

إذا كان $x<0$ فإنّ $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2}{x-3}$ و إذا كان $x\geq 0$ فإنّ $f\left(x\right)=x-\dfrac{5}{4}$ ليست مستمرة عند القيمة 0 لأنّ:

من جهة: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(x-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{-5}{4}$ و من جهة أخرى $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{x^2-2}{x-3}=\dfrac{2}{3}$

نتائج من التعريف:

- ✓ تكون دالة f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من قيّم هذا المجال.
- ✓ إذا كانت دالة f مستمرة على مجال I ،فإنّ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم هو خط متصل.
- ✓ الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها.
- ✓ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- ✓ الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها.
- ✓ الدالتان: $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sin x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.
- ✓ مجموع، جداء و تركيب دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

دالة الجزء الصحيح

تعريف: دالة الجزء الصحيح هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x، العدد الصحيح n الذي يحقق: $n\leq x<n+1$ و نرمز لها بالرمز: E أو $[\ ]$ أو int و نكتب: $E\left(x\right)=\left[x\right]=Int\left(x\right)=n$

أمثلة: $E\left(0,25\right)=0\ ;\ \left[3,56\right]=3\ ;\ Int\left(-1,25\right)=-2\ ;\ E\left(-0,23\right)=-1$

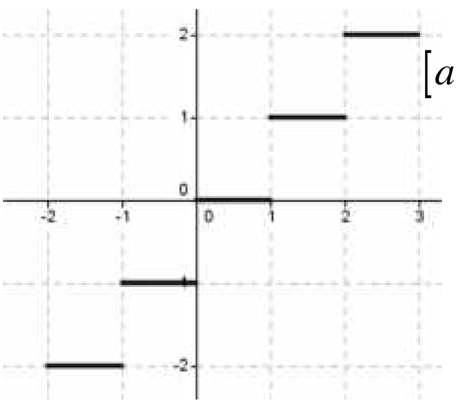
إذا كان $x\in\left[0;1\right[$ فإنّ $E(x)=0$ ، إذا كان $x\in\left[-1;0\right[$ فإنّ $E(x)=-1$

ملاحظة : a عدد صحيح. دالة الجزء الصحيح ثابتة على كل مجال من الشكل $\left[a,a+1\right[$

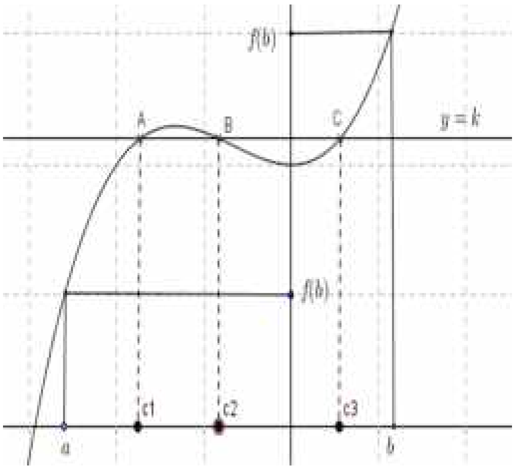
التمثيل البياني لدالة الجزء الصحيح

المستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

الشكل يوضح المنحنى البياني لدالة الجزء الصحيح على المجال $\left]-2;3\right[$



ملاحظة: دالة الجزء الصحيح ليست مستمرة عند كل عدد صحيح.



مبرهنة القيّم المتوسطة

مبرهنة f دالة معرّفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ؛يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$يحقق: $f(c)=k$

بمعنى آخر: المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$

التفسير البياني: f دالة معرّفة و مستمرة على مجال $[a,b]$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ ؛ (d) المستقيم ذو المعادلة $y=k$.من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، (d) يقطع (C) على الأقل في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.(لاحظ الشكل).

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ و كان $(f(a).f(b)<0)$ ،فإنّه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ يحقق: $f(c)=0$ ،و هذا يعنى بيانيا أنّ المنحنى (C) يقطع على الأقل محور الفواصل في نقطة فاصلتها c.

ملاحظة: إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ ،فإنّ حل المعادلة $f(x)=k$ على المجال $[a,b]$ وحيد.

تذكير :

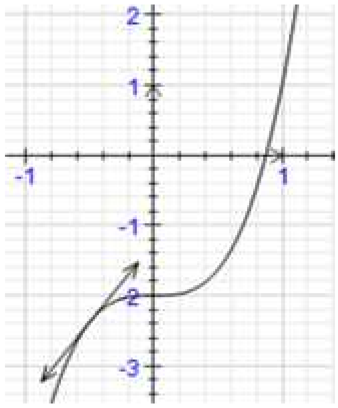
1) حصر عدد حقيقي α معناه ايجاد مجال يشمل α.
2) سعة الحصر هي طول المجال.
3) طول المجال $[a,b]$ هو العدد الحقيقي الموجب $b-a$.
4) كل معادلة من الشكل: $f(x)=g(x)$ هي معادلة مكافئة للمعادلة $h(x)=0$ حيث: $h(x)=f(x)-g(x)$

الاشتـقـاقــية

تعريف: f دالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a عنصر من I . (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس. الدالة f قابلة للاشتقاق في القيمة a معناه للنسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية حقيقية عندما يؤول x إلى a ، نرمز لهذه النّهاية بالرمز $f'(a)$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

تعريف مكافئ: f قابلة للاشتقاق في القيمة a معناه : للنسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية منتهية عندما يؤول h إلى 0 و نكتب: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

مبرهنة: كل دالة قابلة للاشتقاق في قيمة حقيقية a مستمرة عند a و العكس غير صحيح.

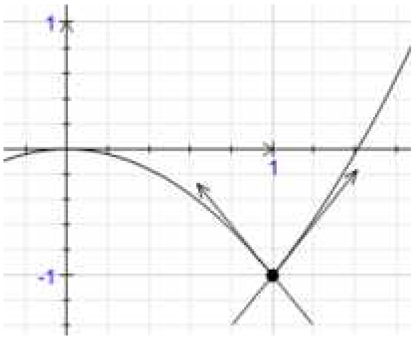


التفسير البياني للعدد المشتق: المنحنى (C) يقبل مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ معادلة له:

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

ملاحظة 1 : إذا كانت للنسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايتين منتهيتين مختلفتين l_1 و l_2 عندما يؤول x إلى a ، فإنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق في القيمة a.

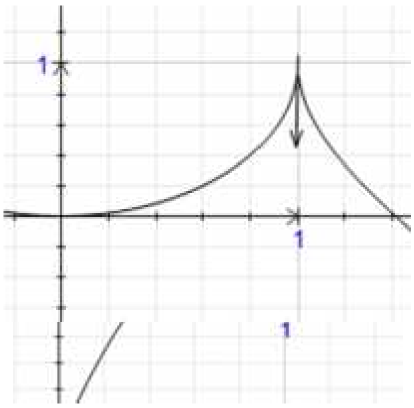
التفسير البياني : المنحنى (C) يقبل في النقطة $S(a,f(a))$ مماسين معامل توجيه كل واحد منهما l_1 و l_2. النقطة S تسمى نقطة زاوية.



إذا كانت للنسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية غير منتهية عندما يؤول x إلى a ،فإنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق في القيمة a.

التفسير البياني : المنحنى البياني للدالة f يقبل في النقطة $S(a,f(a))$مماسا موازٍ لحامل محور التراتيب.

نقطة الانعطاف:

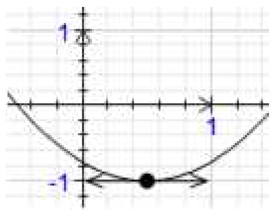


تعريف: نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني.

مبرهنة: a عدد حقيقي. f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل a، f'' دالتها المشتقة الثانية على المجال I،إذا كان $f''(a)=0$ وغيّر $f''(x)$ إشارته بجوار العدد a،على المجال I ؛ فإنّ النقطة $S(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

القيمة الحدّية المحلية لدالة على مجال :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. a عدد حقيقي من I. k عدد حقيقي. (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس .الدالة f تقبل القيمة k قيمة حدّية محلية على المجال I ،من أجل القيمة a للمتغير x إذا و فقط إذا تحقق:



1) $f(a)=k$

2) $f'(a)=0$

3) $f'(x)$ يغيّر إشارته بجوار a .

التفسير البياني: في النقطة ذات الفاصلة a ، المماس للمنحنى موازٍ لحامل محور الفواصل.

عمليات على المشتقات: f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. الدالة g لا تنعدم على I.

الدالة	$f+g$	$f\times g$	$\dfrac{1}{g}$	$\dfrac{f}{g}$	$x\mapsto\sqrt{ax+b}$
الدالة المشتقة	$f'+g'$	$f'\times g+g'\times f$	$\dfrac{-g'}{g^2}$	$\dfrac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$	$x\mapsto\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

الدالة المشتقة لمركب دالتين:

إذا قبلت دالة f الاشتقاق على مجال I ، وقبلت دالة g الاشتقاق على المجال $f(I)$ ، فإنّ الدالة gOf تقبل الاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $(gOf)'(x)=f'(x).g'[f(x)]$.

مثال: f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=(x^2-4x+1)^2$

احسب باستعمال مركب دالتين $f'(x)$.

حل: نضع: $u(x)=(x^2-4x+1)$ و بالتالي $u'(x)=2x-4$

$v(x)=x^2$ و بالتالي: $v'(x)=2x$. لدينا: $f(x)=(vOu)(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=u'(x)v'(u(x))$ أي: $f'(x)=(2x-4)[2u(x)]$

و بالتالي: $f'(x)=2(2x-4)(x^2-4x+1)$

نتائج:

نتيجة 1: f دالة معرّفة ،موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I.الدالة g المعرّفة بالعبارة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I و لدينا: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

نتيجة 2: nعدد صحيح. f دالة معرّفة و قابلة للاشتقاق على مجال I .الدالة g المعرّفة بالعبارة: $g(x)=[f(x)]^n$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $g'(x)=nf'(x)[f(x)]^{n-1}$

مثال: f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$. احسب $f'(x)$ حيث: $f(x)=(x^2-3x+2)^4$

نضع: $u(x)=x^2-3x+2$ وبالتالي: $u'(x)=2x-3$ و لدينا: $f(x)=[u(x)]^4$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=4u'(x)[u(x)]^3$ أي $f'(x)=4(2x-3)(x^2-3x+2)^3$

اتجاه تغير دالة و إشارة المشتق: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

$x\in I: f'(x)\geq 0$	$x\in I: f'(x)\leq 0$	$x\in I: f'(x)=0$
f متزايدة تماما على I	f متزايدة تماما على I	f ثابتة على I

ترميز: f دالة عددية، متغيّرها x،إذا قبلت f الاشتقاق على مجال I نكتب: $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ و إذا كانت f'' هي الدالة المشتقة الثانية لـ f ،نكتب: $f''(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ ،و إذا كانت $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n نكتب:

$f^{(n)}(x)=\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.

تذكير :

مر كز التناظر:

طريقة 1:

$A(a,b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x \in I$ فإنّ $(2a-x) \in I$

ب) $f(2a-x)+f(x)=2b$

طريقة 2:

$A(a,b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x \in I$ فإنّ $(a-x) \in I$ و $(a+x) \in I$

ب) $f(a-x)+f(a+x)=2b$

محور التناظر:

طريقة 1:

يكون مستقيم معادلة له: $x=k$ محور تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x \in I$ فإنّ $(2k-x) \in I$

ب) $f(2k-x)=f(x)$

طريقة 2:

يكون مستقيم معادلة له: $x=k$ محور تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x \in I$ فإنّ $(k-x) \in I$ و $(k+x) \in I$

ب) $f(k-x)=f(k+x)$

مثال 1: f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم

بيّن أنّ النقطة $A(1;2)$ مركز التناظر للمنحنى (C).

مثال 2: f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم

بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $x=2$ محور التناظر للمنحنى (C).

مثال 3: f الدالة العددية المعرفة على D_f حيث: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$ ، (C)

تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم

بيّن أنّ: $f(-3-x)=f(x)$ ،ثمّ فسّر هذه النتيجة بيانيا

تمارين:

الاستمرارية عند قيمة –الاستمرارية على مجال

تمرين 1

ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة a في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=1$:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-1} \quad ...x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

ب) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=0$:
$$\begin{cases} f(x)=5x^2+3x-4 \quad ...x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-4}{x^2+1} \quad ...x<0 \end{cases}$$

ج) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=1$:
$$\begin{cases} f(x)=x^2+E(x) \quad ...x<1 \\ f(x)=xE(x)+1 \quad ...x\geq 1 \end{cases}$$

د) الدالة f معرّفة على المجال I : $I=[-7;+\infty[$ و $a=2$:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \quad ...x\in I \ ; \ x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

تمرين 2: عيّن قيمة m حتى تكون الدالة f مستمرة عند القيمة a في الحالتين:

أ) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=0$:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{2x} \quad ...x\neq 0 \\ f(0)=m \end{cases}$$

ب) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=-1$:
$$\begin{cases} f(x)=x^3-3x^2+x+1 \quad ...x\geq -1 \\ f(x)=-3x+3m \quad ...x<-1 \end{cases}$$

تمرين 3: ادرس استمرارية الدالة f على مجالات مجموعة تعريفها في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=(x^2+1)\cos x$

ب) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f(x)=x^2+1 \quad ...x>2 \\ f(x)=-x^2+4x \quad ...x\leq 2 \end{cases}$$

ج) الدالة f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$:
$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x} \quad ...x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

د) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=|x^2-1|$

مبرهنة القيّم المتوسطة وتطبيقها

تمرين 1 :

1) بيّن أنّ المعادلة: $-x^3+3x^2=3$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;1,5]$.

2) بيّن أنّ المعادلة: $\frac{1}{2}sin\,x+2=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;\pi]$.

3) بيّن أنّ المعادلة: $-x^3=\sqrt{x+1}$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right]$

تمرين 2 : f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{x}\ \ ;\ \ g(x)=\frac{5}{x-2}$

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس.

بيّن أنّ (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث: $4<x_0<5$.

تمرين 3 : f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ثمّ تأكد أنّ $\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

تمرين 4 : f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

2) احسب من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ،ثمّ عيّن حصرا سعته $0,5$ للعدد α.

5) عيّن من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة $f(x)$.

الاشتقاقية في قيمة–الاشتقاقية على مجال:

تمرين 1 : أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في القيمة a في الحالات الآتية ثمّ فسّر كل نتيجة هندسيا:

1) f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=x\sqrt{x}$ ؛ $a=0$

2) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1]$ بالعبارة : $f(x)=\sqrt{1-x}$ ؛ $a=1$

3) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=3x+|x^2-4|$ ؛ $a=-2$ ، $a=2$

تمرين 2 : f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

إذا كان : $x \geq 2$ فإنّ : $f(x)=(x-2)\sqrt{x-2}$

و إذا كان $x<2$ فإنّ: $f(x)=x^2+kx+2$

(C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الحقيقي k حتي تكون الدالة f مستمرة عند 2 .

2) من أجل قيمة k المحصل عليها في السؤال السابق، ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في القيمة 2 ، فسّر النتيجة بيانيا.

تمرين 3 : f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ ، (C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) برّر أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجالي مجموعة تعريفها ثمّ احسب $f'(x)$.

2) بيّن أنّ يوجد مماس وحيد لـ(C) يمر بالمبدأ.

3) اكتب معادلة لهذا المماس.

4) g الدلة العددية المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

أ) بيّن أنّ الدالة g مركب دالتين إحداهما الدالة f .

ب) استنتج من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)$.

تمرين 4 :

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-x^3+3x+1$ ،

(C)تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى(C) في النقطة$A(0;1)$.

2) ادرس حسب قيّم العدد الحقيقي x ،إشارة : $f(x)-(3x+1)$.فسّر النتيجة بيانيا.

3) برهن بطريقة ثانية أنّ النقطة A هي نقطة انعطاف للمنحنى(C).

تمرين 5 :

h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\dfrac{\left|x^2-2x-3\right|}{x}$

1) أ) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس استمرارية الدالة h عند القيمة3 .هل تقبل الدالة h الاشتقاق في القيمة 3؟ مع التبرير.

ج) احسب نهايات الدالة h عند الحدود المفتوحة من مجال تعريفها.

2) احسب $h'(x)$ و حدّد إشارتها على المجال $]0;+\infty[$.أنجز جدول تغيرات الدالة h .

تمرين 6:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};2\right\}$ بالعبارة: $f\left(x\right)=\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$ ،

$\left(C\right)$تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة تعريف الدالة f :

$$f\left(x\right)=a+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{x-2}$$

2) أ) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجالات مجموعة تعريفها.

ب) استنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى$\left(C\right)$.

3) احسب $f'\left(x\right)$ ،حدّد إشارتها ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) عيّن فواصل نقط تقاطع المنحنى $\left(C\right)$و حاملي المحاور.

ب) أنشئ بعناية المنحنى $\left(C\right)$.

5) g الدالة العددية المعرّفة على$\left]-\infty;0\right[$ بالعبارة: $g\left(x\right)=\frac{4-5x}{2x^2-5x+2}$

أ) تحقق: أنّ $g\left(x\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ،ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)$ بطريقتين مختلفتين.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $\left]-\infty;0\right[$.

تمرين 7:

f الدالة المعرّفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بِـ : $f\left(x\right)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$.

$\left(C\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب نهاية الدالة f عند$\left(+\infty\right)$.

ب) بيّن أنّ المستقيم$\left(d\right)$ ذا المعادلة $y=2x+3$ ، مستقيم مقارب لـ$\left(C\right)$ بجوار $\left(+\infty\right)$.

2) أ) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0؟

ب) أحسب $f'\left(x\right)$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما .

ج) أنجز جدول تغيّرات الدالة f .

3) أنشئ المستقيم$\left(d\right)$ ثمّ المنحني $\left(C\right)$.

4) أنشئ باستعمال المنحنى$\left(C\right)$،المنحنى$\left(C'\right)$ الممثل لتغيرات الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$

تمرين 8:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجالات مجموعة تعريفها.

ب) استنتج أنّ المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مواز لحامل محور التراتيب.

2) أ) برّر أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها،ثمّ احسب $f'(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ أنجز جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة لمماس (C) في النقطة ذات الفاصلة 0.

4) أ) بيّن أنه من أجل كل x من مجموعة تعريف الدالة f يكون : $f(x)=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$

ب) استنتج أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+1$ قارب مائلا للمنحني (C)

ج) أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (d).

5) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;1[$.

ب) أنشئ بعناية المنحنى (C) ومستقيماته المقاربة.

6) m وسيط حقيقي. نعتبر المعادلة (1)ذات المجهول x حيث: $(m-1)x^2-x-m+1=0$

أ) حل المعادلة(1) من أجل $m=1$

ب) بيّن أنّه إذا كان $m\neq 1$ ، المعادلة(1)تقبل حلّين مختلفين.

ج) بيّن أنّ المعادلة (1)مكافئة للمعادلة $f(x)=x+m$

د) باستعمال المنحنى (C) حل المعادلة (1).

تمرين 9: بكالوريا 2014

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αحيث: $0,7<\alpha<0,8$

ب) استنتج حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$.

(C_f)تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيّم x ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f (نأخذ $f(\alpha)\approx -0{,}1$)

4) احسب $f(1)$ ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) تحقق أنّ من أجل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثمّ أنشئ (C_h).

تمرين 10 :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f .

ب) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجموعة تعريفها.

ج) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x+3]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x-1]$.فسّر نتائجك بيانيا.

3) أ) بين أن النقطة $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ مركز التناظر للمنحني (C).

ب) هل توجد مماسات للمنحنى (C) ميلها 1 ؟

ج) بين أن المنحني (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $0{,}6<\alpha<0{,}7$

د) أنشئ (C) ومستقيماته المقاربة.

4) m عدد حقيقي .ناقش بيانيا حسب قيّم العدد m عدد و إ شارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

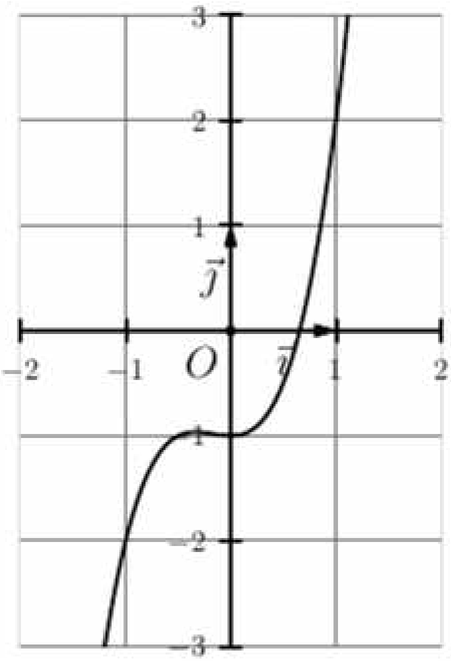
$$2x-1-(m+1)\sqrt{x^2-x+1}=0$$

5) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=|x|-1+\dfrac{2|x|-1}{\sqrt{x^2-|x|+1}}$ ، (C')تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية.

ب) دون دراسة و باستعمال المنحنى (C)،أنشئ المنحنى (C').

التمرين 11 :



1)الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x)=2x^3+x^2-1$.

بقراءة بيانية:

أ) عيّن حصرا سعته $0,5$ للعدد α الذي يحقق: $g(\alpha)=0$

ب) من أجل كل عدد حقيقي x ، حدّد إشارة $g(x)$.

2) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+x+\dfrac{1}{x})$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) أُحسب نهايات الدالة f عند حدود مجالات تعريفها.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$، احسب $f'(x)$ و حدّد إشارتها.

ج) عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ،ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) أُكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة$(A(-1;f(-1))$.

ب) أُدرس الوضع النسبي للمستقيم (T) و المنحني (C_f) و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) بيّن أنّ المستقيم(T') ذا المعادلة $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{4}$ مماس لـ(C_f)في نقطة يطلب تعيين فاصلتها.

4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث: $-1,47<x_0<-1,46$.

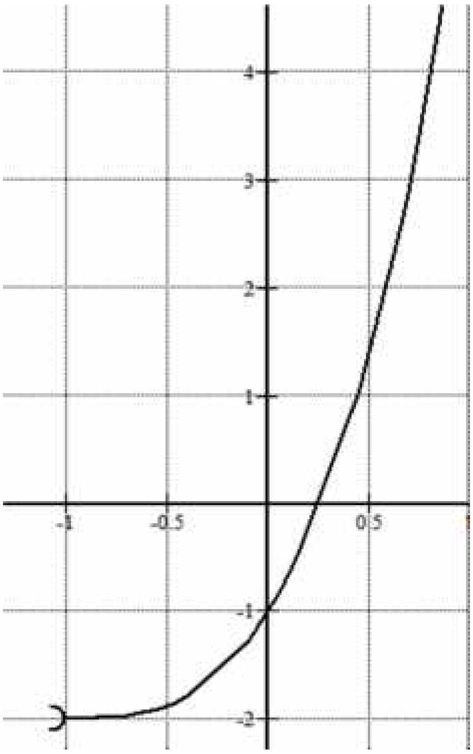
ب) أنشئ بدقة المماسين(T)،(T') و المنحنى (C_f).

5) باستعمال المنحنى(C) أنشئ المنحنى(C') الممثل لتغيرات الدالة gالمعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة:$g(x)=|f(x)|$

تمرين 12 : بكالوريا 2009

المنحنى (C) المقابل: هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$



1) أ/ بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g و حدّد $g(0)$ و إشارة $g(\frac{1}{2})$

ب/علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

ج/استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

2) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ/ تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

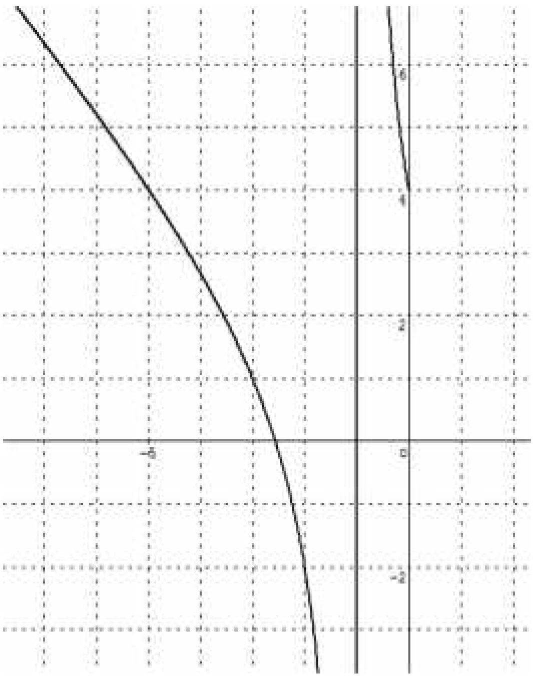
$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب/عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج/احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسر النتيجتين بيانيا.

د/ بيّن أنّ : $f(\alpha) = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$

3) أنشئ المنحنى (Γ) و مستقيماته المقاربة.



تمرين 13 :بكالوريا 2008

I) f الدالة العددية المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ:

$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ،كما هو مبيّن في الشكل التالي:

1)أ) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجالي تعريفها

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة تغيرات الدالة f شكّل جدول تغيراتها.

2) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ:

$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم السابق

أ) احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ب) تحقق أنّ $\left(C_g\right)$يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس تغيرات الدالة g .

k (II الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$ ، $\left(C_k\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) أ) احسب $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ؛ $\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0} \dfrac{k(h)-k(0)}{h}$. ماذا تستنتج؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) اكتب معادلتي نصفي المماسين $\left(\Delta_1\right)$ و $\left(\Delta_2\right)$ في النقطة التي فاصلتها معدومة.

3) أنشئ $\left(\Delta_1\right)$،$\left(\Delta_2\right)$ و $\left(C_k\right)$.

تمرين 14:

g (I الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=x^3+3x+8$

1) أ) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x، احسب $g'(x)$ و عيّن إشارتها.

2) أ) أنجز جدول تغيرات الدالة g .

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$,تأكد أنّ: $\alpha \in]-2;-1[$.

ج) استنتج حسب قيّم العدد الحقيقي x،إشارة $g(x)$.

f (II الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

1) أ) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$ ،

حيث: a ،b ،c و d أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج) استنتج أنّ المنحنى (C)يقبل مستقيما مقاربا مائلا(d) يطلب تعيين معادلة له.

د) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (d).

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x،احسب $f'(x)$ و تأكد أنّ : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

ب) استنتج دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

ج) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) أنشئ بعناية المنحنى (C) و مستقيمه المقارب.

4) m وسيط حقيقي. عيّن قيّم m حتى تقبل المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول مختلفة.

5) h الدالة العددية المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $h(x)=f(\sin x)$.عيّن $h'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة h

تمرين 15 بكالوريا رياضيات

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجال تعريفها.

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما المستقيم (d)ذو المعادلة $y=x$.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C)و المستقيم (d) .

3) أ) بيّن انّ المنحنى (C)يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1{,}3<x_0<1{,}4$

ب)عيّن معادلة للمماس (T)للمنحنى (C)في نقطة تقاطعه مع حامل محور التراتيب.

ج) أنشئ المستقيم (d) و المنحنى (C).

4) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$ ، (C_1) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_1) انطلاقا من المنحنى (C).

ب) m عدد حقيقي. ناقش بيانيا عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $g(x)=m^2$

تمرين 16

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x-2+\sqrt{x^2+4}$ (C) تمثيلها بيانها في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا $\sqrt{x^2+4}+x>0$.

ج) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

2) نعتبر المستقيمين: $(D): y=2x-2$ و $(D'): y=-2$

أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x+2\right]$. فسّر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

ب) بيّن أنّ المستقيم (D') مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ج) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (D) و (D').

د) احسب $f(0)$ ،ثمّ أنشئ (D) ، (D')و (C).

3) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=-|x|-2+\sqrt{x^2+4}$ ، (C')تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) هل تقبل الدالة g الاشتقاق عند 0؟ فسّر ذلك بيانيا.

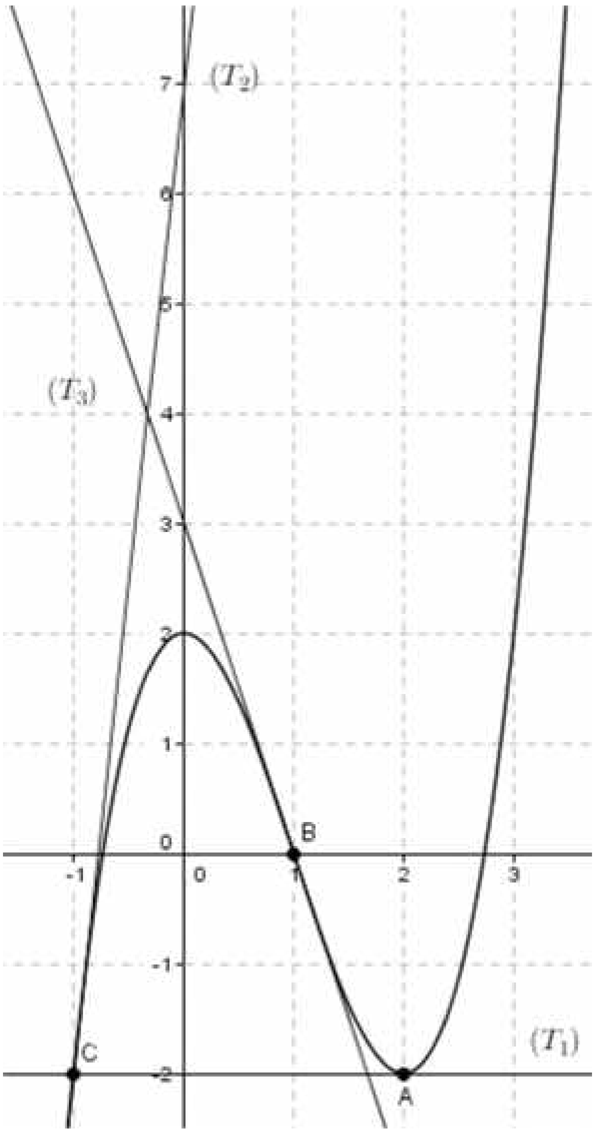
ب) بيّن أنّ الدالة g زوجية.

ج) باستعمال المنحنى (C)أنشئ المنحنى (C').

تمرين 17

f الدالة العددية المعرّفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تمثيلها البياني (C) كما هو مبيّن في الشكل المقابل.

المستقيمات (T_1) ، (T_2)و (T_3) مماسات لـ (C) في النقط A ، C و B على الترتيب.



بقراءة بيانية

1) عيّن $f'(2)$ ، $f'(-1)$و $f'(1)$.

2) اكتب معادلة لكل من (T_1) ، (T_2)و (T_3).

3) حدّد وضعية المنحنى (C) و المستقيم (T_3).فسّر النتيجة بيانيا.

4) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f'(x)<0$.

5) أنجز جدول تغيرات الدالة f في المجال $]0;+\infty[$.