الدالة الأسية

تعريف:

الدالة الأسية النيبرية هي الدالة الوحيدة f المعرّفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق: $f'=f$ و $f(0)=1$.

نرمز لها بالرمز : exp .

يوجد عدد حقيقي نرمز له بالرمز e و يحقق: $exp(1)=e$ و يقارب $2,718$.

اصطلاحا نكتب من أجل كل عدد حقيقي x : $exp(x)=e^x$

ويكون : $e^1=e$; $e^0=1$ و من أجل كل متغير حقيقي x: $(e^x)'=e^x$

خواص: x و y عددان حقيقيان. n عدد طبيعي.

1) $e^{x+y}=e^x.e^y$ 2) $e^x.e^{-x}=1$ 3) $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$

4) $(e^x)^n=e^{nx}$ 5) $\sqrt{e^x}=e^{\frac{1}{2}x}$ 6) من أجل كل عدد حقيقي x: $e^x>0$.

نتيجة 1: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتيجة 2: $f(x)$ و $g(x)$ عبارتان جبريتان معرّفتان على D_f و D_g على التوالي.

أ) $e^{f(x)}=e^{g(x)}$ معناه $f(x)=g(x)$.

ب) $e^{f(x)}>e^{g(x)}$ معناه $f(x)>g(x)$.

تطبيقات على الخواص

1) حل في المجموعة $\mathbb{R}$، المعادلات الآتية:(أ) $e^{3x+3}=1$ ،(ب) $e^{x^2-5}=\dfrac{1}{e}$ ، (ج) $e^{3x+3}=-1$

المناقشة:

(أ) $e^{3x+3}=1$ معناه $e^{3x+3}=e^0$ و بالتالي $3x+3=0$ أي $x=-1$

(ب) $e^{x^2-5}=\dfrac{1}{e}$ معناه $e^{x^2-5}=e^{-1}$ و بالتالي $x^2-5=-1$ أي $x=-2$ أو $x=2$

(ج) المعادلة $e^{3x+3}=-1$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

2) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحات الآتية: (أ) $e^{2-2x}>1$ ، (ب) $e^{x^2-2}\leq\dfrac{1}{e}$ ، (ج) $e^{2x+1}<0$

المناقشة:

(أ) $e^{2-2x}>1$ معناه $e^{2-2x}>e^0$ و بالتالي $2-2x>0$ أي: $x\in]-\infty;1[$.

ب) $e^{x^2-2} \leq \frac{1}{e}$ معناه $e^{x^2-2} \leq e^{-1}$ و بالتالي $x^2-2 \leq -1$ أي: $x \in [-1;1]$.

ج) المتراجحة $e^{2x+1} < 0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

3) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = e^x - x$.

أ) برّر أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب) احسب $f'(x)$ ، و حدّد إشارتها على $\mathbb{R}$.

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

المناقشة:

أ) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنّها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب) $f'(x) = e^x - 1$ و إشارة $f'(x)$ مبيّنة في الجدول:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

ج) الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

4) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^x - 3e^{-x} + 2 = 0$.

المناقشة:

المعادلة $e^x - 3e^{-x} + 2 = 0$ تكافئ: $e^x - \frac{3}{e^x} + 2 = 0$ و بالتالي: $\frac{e^{2x} + 2e^x - 3}{e^x} = 0$

و منه: $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \ldots (1)$

المعادلة (1) تصبح بوضع $y = e^x$ (مع $y > 0$): $y^2 + 2y - 3 = 0$ و بالتالي: $y = 1$ أي $e^x = 1$ إذن $x = 0$.

و بالتالي: المعادلة $e^x - 3e^{-x} + 2 = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ هو 0.

5) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.بيّن أنّ الدالة f فردية.

المناقشة:

أ) مجموعة تعريف الدالة f متناظرة بالنسبة للصفر.

ب)
$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$
$$f(-x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$$
إذن الدالة f فردية.

نهايات الدالة الأسية:

مبرهنة : (أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

تمرين :الهدف من التمرين هو إثبات المبرهنة السابقة

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = e^x - x$

1) أ) بيّن أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ، ثمّ احسب $f'(x)$ ، محدّدا إشارتها.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ج) احسب $f(0)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $e^x > x$.

2) استنتج أنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

3) معتمدا على خواص الدالة الأسية النيبرية و النتيجة السابقة ، أثبت أنّ: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

المناقشة

1) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ كمجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على هذا المجال.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x) = e^x - 1$

إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ مبيّنة في الجدول التالي:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = e^x - 1$	0 $\quad$ $+$

ب) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

ج) حساب $f(0)$:

$f(0) = 1$ و بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$، فإنّ : $f(x) \geq 1$ و بالتالي:

إذا كان $x \geq 0$ فإنّ $f(x) > 0$

فإنّ $e^x - x > 0$

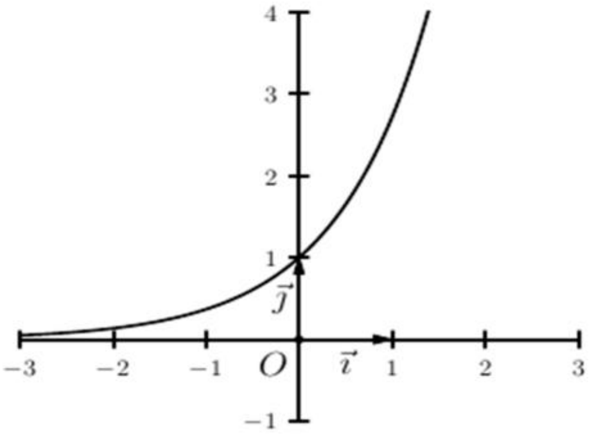
أي: $\boxed{e^x > x}$ و هو المطلوب.

2) بما أنّ من أجل $x \geq 0$: $e^x > x$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$

3) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ ، إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$.

المنحنى البياني للدالة الأسية يقبل المستقيم ذا المعادلة $y = 0$ مقاربا بجوار $(-\infty)$.

جدول تغيرات الدالة الأسية وتمثيلها البياني



x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

نهاية شهيرة للدالة الأسية:

الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي a يكون: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$.

فمن أجل $a=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

نهاية الدالة المركبة : $x\mapsto e^{f(x)}$:

α يمثل عددا حقيقيا أو $(-\infty)$ أو $(+\infty)$، l عدد حقيقي.

بالاعتماد على نهايتي الدالة الأسية النيبرية نستنتج نهايات الدالة المركبة : $x\mapsto e^{f(x)}$ المبينة في الجدول التالي:

$\lim\limits_{x\to \sim} f(x)$	$\lim\limits_{x\to \sim} e^{f(x)}$
$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$
l	e^l

تطبيق على النهايات: احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-ex+1\right) \text{ ، } \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+1} \text{ ، } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^x}{e^x-1} \text{ ، } \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^x}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} \text{ ، } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}e^{\frac{1}{x-1}} \text{ ، } \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}e^{\frac{1}{x-1}}$$

الدالة المشتقة للدالة : $x \mapsto e^{f(x)}$

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$، فإنّ الدالة g المعرّفة بالعبارة: $g(x)=e^{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$

f الدالة المعرّفة على $]-\infty;-1[$ بالعبارة: $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;-1[$ و لدينا:

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}$.

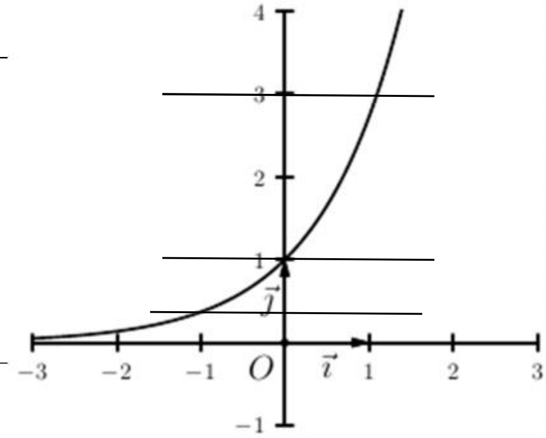
أمثلة: احسب $f'(x)$ على المجال المعطى في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) $f(x)=e^{x^2-3x};\mathbb{R}$ ب) $f(x)=e^{\sqrt{x}};]0;+\infty[$ جـ) $f(x)=e^{\cos x};\mathbb{R}$

اللوغاريتم النيبيري لعدد حقيقي موجب تماما

k عدد حقيقي. المعادلة ذات المجهول x : $e^x=k$، لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان $k\le 0$ وتقبل حلا وحيدا إذا كان $k>0$. و باستعمال المنحنى البياني للدالة الأسية النيبيرية، نلخص إشارة الحل في الجدول الآتي:

قيّم k	إشارة الحل
$k\in]0;1[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
$k=1$	المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما
$k\in]1;+\infty[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا



ترميز:

حل المعادلة $e^x=k$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $\ln(k)$

$\ln$ يرمز للوغاريتم النيبيري. ونكتب من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما k:

$e^x=k$ معناه $x=\ln(k)$

مثال :

حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلة ذات المجهول x : $e^{2x+2}=6$

$e^{2x+2}=6$ معناه $2x+2=\ln(6)$

معناه $x=\dfrac{\ln(6)-2}{2}$

المعادلات التفاضلية من الشكل: $y' = ay + b$

a و b عددان حقيقيان.

حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ حيث: $a \neq 0$ هي الدوال العددية y المعرّفة بالعبارة: $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية : $y' = 2y - 3$ هي الدوال من الشكل: $y(x) = Ce^{2x} + \frac{3}{2}$

حساب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$

f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$

1) أ) f' هي الدالة المشتقة للدالة f على المجال $[0;+\infty[$.احسب $f'(x)$.

ب) f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f على $[0;+\infty[$.احسب $f''(x)$ و حدّد إشارتها على المجال $[0;+\infty[$.

ج) حدّد اتجاه تغير الدالة f' على المجال $[0;+\infty[$.

2) عيّن إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أ) بيّن أنّه من أجل $x \geq 0$ فإنّ: $e^x > \frac{1}{2}x^2$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$.

حل: 1) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x) = e^x - x$

ب) الدالة f' قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و لدينا: $f''(x) = e^x - 1$. من أجل $x \geq 0$: $f''(x) \geq 0$.

ج) الدالة f' متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;+\infty[$: بما أنّ f' متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$،فإنّ $f'(x) \geq f'(0)$

أي $f'(x) \geq 1$ و بالتالي من أجل $x \geq 0$: فإنّ: $f'(x) > 0$.

نستنتج أنّ: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3) أ) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي: $f(x) \geq f(0)$ أي: $f(x) > 0$.

إذن: $e^x - \frac{1}{2}x^2 > 0$ أي: $e^x > \frac{1}{2}x^2$

ب) من النتيجة السابقة: $e^x > \frac{1}{2}x^2$ نكتب: $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$ و بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ ، فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

الاستنتاج: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{t\to+\infty} -te^{-t}$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$

تطبيقات محلولة

التمرين الأول:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=2x-1-e^{-x}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) احسب $f'(x)$ ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f .

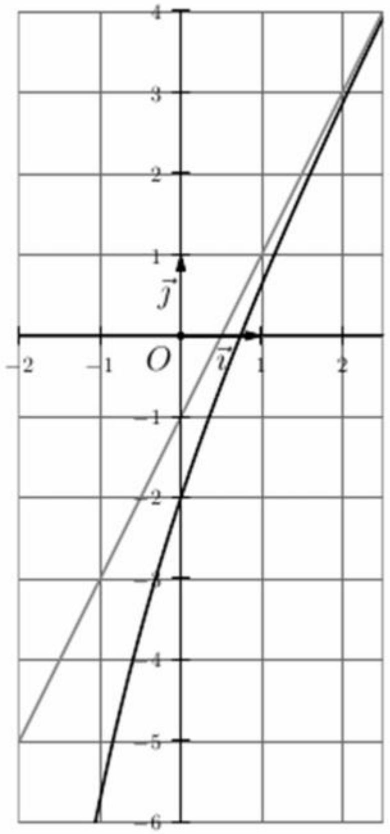
2) برهن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $(+\infty)$.

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}73<\alpha<0{,}74$.

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

4) أنشئ المستقيم (d) و المنحنى (C).

حل مختصر:



1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) $f'(x)=2+e^{-x}$ ، $f'(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ،

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) المستقيم (d) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ لأنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}-e^{-x}=0$$

بما أنّ: $f(x)-(2x-1)=-e^{-x}$ فإنّ المنحنى (C) أسفل المستقيم (d).

3) أ) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}73<\alpha<0{,}74$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0{,}73;0{,}74[$ و $f(0{,}73)=-0{,}022$ ، $f(0{,}74)=0{,}003$ زيادة على ذلك f متزايدة تماما على المجال $]0{,}73;0{,}74[$.

ب) إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ مبيّنة كما يلي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	−	0	+

4) الإنشاء:

المنحنى (C) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة $A(0;-2)$ و يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $B(\alpha;0)$

التمرين الثاني:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=2x+\dfrac{4}{e^{x}+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]$. استنتج وجود مستقيمين مقاربين للمنحنى (C_f).

2) أ) برّر أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثمّ احسب $f'(x)$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثم أنجز جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ: $f(x)=4-f(-x)$. ماذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f ؟

ب) عيّن القيمة المضبوطة لـ $f(2)$ ثم استنتج قيمة $f(-2)$.

جـ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $S(0,f(0))$. (النقطة S هي نقطة انعطاف لـ (C_f))

4) بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1{,}69;-1{,}68[$.

5) أنشئ بدقة المماس (T) و المنحنى (C_f).

حل مختصر:

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=4$. المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلة له $y=2x$ و يقبل بجوار $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلة له $y=2x+4$.

2) أ) $f'(x)=2\left[\dfrac{e^{2x}+1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}\right]$

ب) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ)

$$4-f(-x)=4-2(-x)-\frac{4}{e^{-x}+1}$$

$$4-f(-x)=2x+4-\frac{4}{\frac{1}{e^{x}}+1}$$

$$4-f(-x)=2x+4-\frac{4e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$4-f(-x)=2x+\frac{4+4e^{x}-4e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$\boxed{4-f(-x)=2x+\frac{4}{1+e^{x}}=f(x)}$$

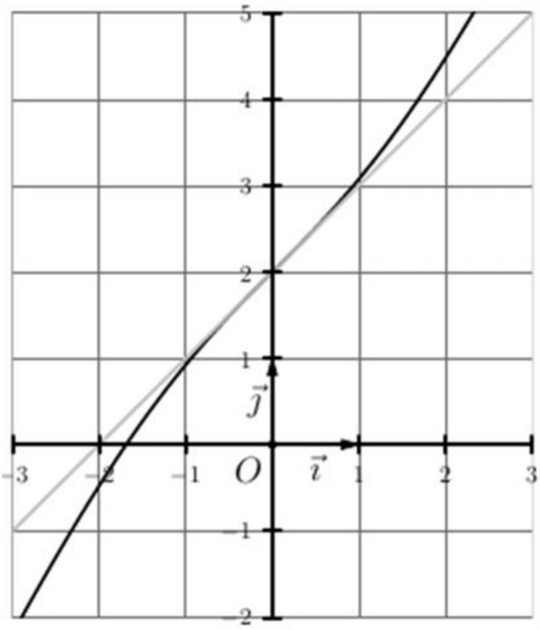
و بالتالي: $f(x)+f(-x)=4$ ، النقطة $S(0;2)$ مركز التناظر للمنحنى (C_f).

ب) القيمة المضبوطة لـ $f(2)$:

$f(2)=4+\dfrac{4}{e^2+1}$ و منه باستعمال النتيجة السابقة:

$$f(-2)=4-f(2)$$

$$f(-2)=-\frac{4}{e^3+1}$$



جـ) معادلة المماس $(T): y=x+2$

4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$-1{,}69<\alpha<-1{,}68$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-1{,}69;-1{,}68[$

و $f(-1{,}69)=-0{,}003$ ، $f(-1{,}68)=0{,}012$ زيادة على ذلك f متزايدة تماما على المجال $]-1{,}69;-1{,}68[$.

الانشاء:

المنحنى (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة $S(0;2)$ و يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $K(\alpha;0)$.

التمرين الثالث:

n عدد طبيعي غير معدوم. f_n الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f_n(x)=\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

(C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f_1 عند الحدود المفتوحة من مجال تعريفها. فسّر نتائجك بيانيا.

2) برهن أنّ الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $0<f_1(x)<4$.

3) برهن أنّ النقطة $w(\ln 7;2)$ مركز التناظر للمنحنى (C_1) ، ثمّ اكتب معادلة المماس لـ (C_1) في النقطة w.

4) أ) أنشئ المنحنى (C_1).

ب) أنشئ المنحنى البياني للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=f(|x|)$

5) برهن أنّ كل المنحنيات (C_n) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها.

6) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، المنحنى (C_n) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ في نقطة وحيدة I_n يطلب تعيين فاصلتها.

ب) اكتب معادلة للمماس (T_n) للمنحنى (C_n) في النقطة I_n.

المناقشة

1) $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=4$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_1) بجوار $(-\infty)$

المستقيم ذو المعادلة $y=4$ مقارب لـ (C_1) بجوار $(+\infty)$

2) من أجل كل عدد حقيقي x : $f_1'(x)=\dfrac{28e^x}{\left(e^x+7\right)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f_1'(x)>0$.

الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، و تأخذ قيّمها في المجال $]0;4[$ و بالتالي :من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\boxed{0<f_1(x)<4}$$

3) أ) النقطة $w(\ln 7;2)$ مركز تناظر لـ (C_1) معناه

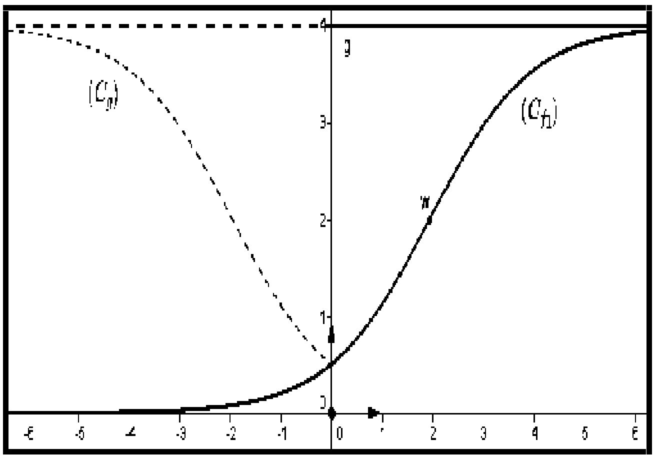
*) من أجل $x\in\mathbb{R}$ ، $(2\ln 7-x)\in\mathbb{R}$.

*) $f_1(2\ln 7-x)+f_1(x)=4$.

ب) معادلة المماس لـ (C_1) في النقطة w :

$$y=x+2-\ln 7$$

4) الإنشاء



5) إثبات أنّ كل المنحنيات (C_n) تشمل نقطة ثابتة:

لتكن النقطة $A(a,b)$ حيث: $A(a,b)\in(C_n)$

لدينا: $b=\dfrac{4e^{na}}{e^{na}+7}$ و منه $b\left(e^{na}+7\right)=4e^{na}$

و بالتالي: $e^{na}(b-4)+7b=0$

أي: $e^{na}=\dfrac{7b}{(4-b)}$ $\left(b\neq 4\right)$

إذن: $na=\ln(\dfrac{7b}{(4-b)})$

وهذا يعني: $na-\ln(\dfrac{7b}{(4-b)})=0$

و تتحقق هذه المساواة من أجل كل عدد طبيعي n إذا كان:

($a=0$ و $\ln(\dfrac{7b}{(4-b)})=0$)

و يكون : ($a=0$ و $\dfrac{7b}{(4-b)}=1$)

ومنه (($a=0$ و $b=\dfrac{1}{2}$) أي: $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

6) أ) تقاطع المنحنى (C_n) و المستقيم ذو المعادلة: $y=2$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $f_n(x)=2$

$f_n(x)=2$ معناه $\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=2$

معناه $e^{nx}=7$

معناه $x=\dfrac{\ln(7)}{n}$

ب) معادلة المماس لـ (C_n) في النقطة $I_n(\dfrac{\ln(7)}{n};2)$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f_n'(x)=\dfrac{28ne^{nx}}{\left(e^{nx}+7\right)^2}$

$$\boxed{y=nx+2-\ln(7)}$$

تمرين 4:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f .

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر النتائج بيانيا.

2) أ) بيّن أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز التناظر للمنحني (C).

ب) عين معادلة للمماس (T) للمنحني (C) في النقطة A .

3) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{e^x-1}{1+e^x}\right)^2$

ب) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

ج) استنتج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المماس (T). فسّر النتيجة بيانيا.

د) أنشئ المستقيم (T)و المنحنى (C) .

المناقشة:

1) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل عدد حقيقي لدينا: $f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ إذن: $f'(x)>0$. الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0$.المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $-\infty$ معادلة له: $y=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلة له: $y=1$

2) أ) إثبات أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز التناظر للمنحني (C):

نبين أنّ:(أ) $x\in\mathbb{R};-x\in\mathbb{R}$ (واضح) (ب) $f(-x)+f(x)=1$

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$=\frac{1}{e^{x}+1}+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}+1}{e^{x}+1}=1$$

ب) معادلة المماس (T) : $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

3) $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$

أ) $g'(x)=\frac{1}{4}-f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$

ب) حساب $g(0)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: $g(0)=0$ و إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ مبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

ج) استنتاج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المماس (T) :دراسة إشارة $\left(f(x)-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)\right)$ على $\mathbb{R}$:

مما سبق لدبنا: $\left(f(x)-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)\right)=-g(x)$ و بالتالي يكون :

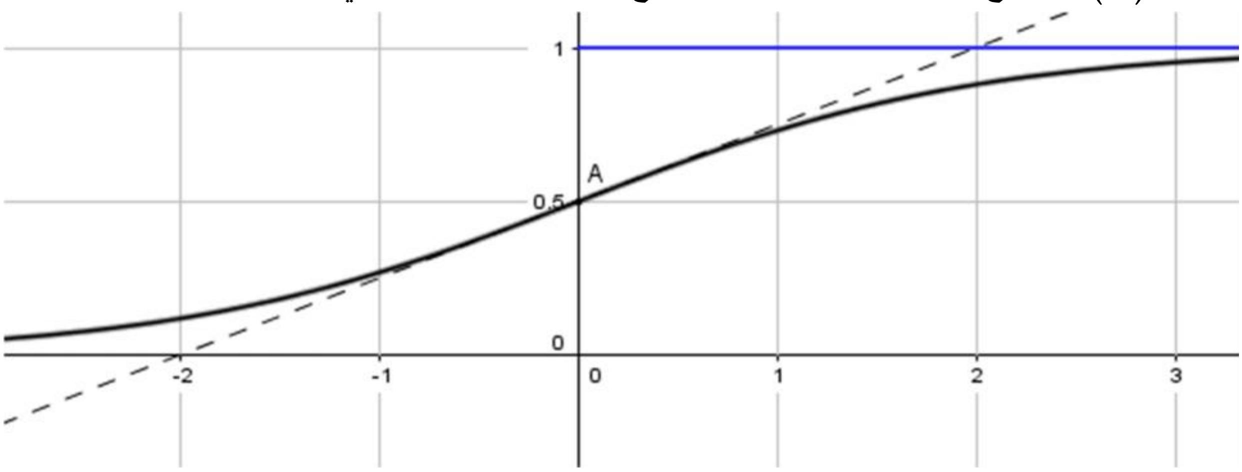
المماس (T) تحت المنحنى (C) إذا كان $x\in]-\infty;0[$.

المماس (T) فوق المنحنى (C) إذا كان $x\in]0;+\infty[$.

نتيجة: المماس (T) يخترق المنحنى (C)،في النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.النقطة A نقطة انعطاف للمنحنى (C).

د) التمثيل البياني:

المنحنى (C) لا يقطع حامل محور الفواصل و يقطع حامل محور التراتيب في النقطة A .



التمرين الخامس

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^{x}+e^{-x}$

1) أ)احسب نهايتي الدالة g عند $(-\infty)$ وعند $(+\infty)$.

ب) احسب $g'(x)$ و حدّد إشارتها على $\mathbb{R}$.

2) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 2$.

3) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-3}{e^{x}+e^{-x}-1}$ ، (C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أنّ الدالة f زوجية.

ب) احسب نهايتي الدالة f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$. فسّر نتائجك بيانيا.

ج) من أجل $x\in\mathbb{R}$ ،احسب $f'(x)$ و تأكد أنّ $f'(x)=\dfrac{3g'(x)}{\left(e^{x}+e^{-x}-1\right)^{2}}$. أنجز جدول تغيرات الدالة f .

د) أنشئ (C) و مستقيماته المقاربة.

4) h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{3}{e^{x}+e^{-x}-1}$ ، (C')منحناها البياني في المستو المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) تأكد أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)=\left|f(x)\right|$.

ب) أنشئ المنحنى (C').

المناقشة

1) أ) حساب نهايتي الدالة g عند $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

ب) احسب $g'(x)$و حدّد إشارتها على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{x}-e^{-x}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}}$ و gمتزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2) $g(0)=0$ ، $\left[g(x)<0\ ;\ x\in]-\infty;0[\right]$ ، $\left[g(x)>0\ ;\ x\in]0;+\infty[\right]$.

الدالة g تقبل قيمة حدّية محلية صغرى هي: $g(0)=2$ و بالتالي: من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 2$

3) أ) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $(-x)\in\mathbb{R}$ و: $f(-x)=\dfrac{-3}{e^{-x}+e^{x}-1}=f(x)$ و الدالة f زوجية.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ ، المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C) عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

ج) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x)=\frac{3\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{-x}+e^{x}-1\right)^{2}}=\frac{3\times g(x)}{\left(e^{-x}+e^{x}-1\right)^{2}}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: $f'(0)=0$

$x\in]-\infty;0[$ $f'(x)<0$ ، $x\in]0;+\infty[$ $f'(x)>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-3	↗	0

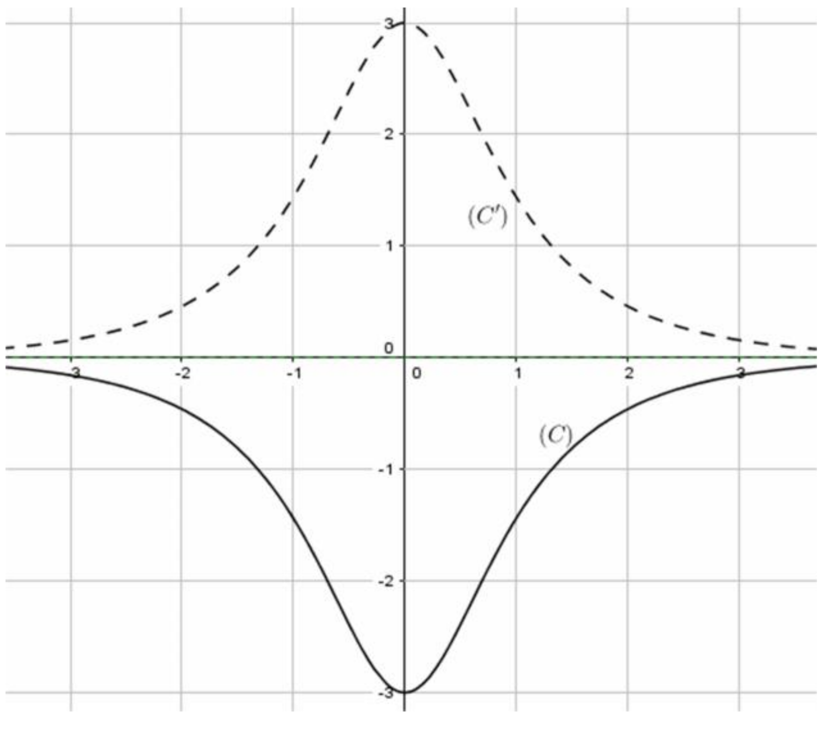
4)أ) مما سبق $g(x)=e^{x}+e^{-x}\geq 2$ معناه $e^{x}+e^{-x}-1\geq 1$ أي : $e^{x}+e^{-x}-1>0$

نستنتج أن:

$\left|e^{x}+e^{-x}-1\right|=e^{x}+e^{-x}-1$ معناه $\left|f(x)\right|=\frac{|-3|}{\left|e^{x}+e^{-x}-1\right|}=\frac{3}{\left|e^{x}+e^{-x}-1\right|}=\frac{3}{e^{x}+e^{-x}-1}$

و بالتالي: $h(x)=\left|f(x)\right|$

ب) (C) و (C') متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل.



التمرين السادس:

f الدالة العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=-x+\frac{e^x+1}{e^x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ب) بيّن أنّ الدالة f فردية و فسّر النتيجة بيانيا.

1) أ) احسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب) برّر أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ج) استنتج معادلة المستقيم المقارب الآخر.

د) حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d).

2) احسب $f'(x)$ و شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$.

3) أ) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث: $1<\alpha<2$.

ب) أنشئ المنحنى (C_f) و مستقيماته المقاربة.

ج) m وسيط حقيقي. باستعمال المنحنى (C_f)، ناقش حسب قيّم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$m-1=\frac{2}{e^x-1}$$

المناقشة:

1) أ) تبيين انّ الدالة f فردية:(مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة لـ 0 و $f(-x)=-f(x)$)

$D_f=\mathbb{R}^*$ و بالتالي : إذا كان $x\in D_f$ فإنّ $(-x)\in D_f$

و كذلك:

$$f(-x)=x+\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$$
$$f(-x)=x+\frac{e^x+1}{1-e^x}$$

$$f(-x)=x-\frac{e^x+1}{e^x-1}$$
$$f(-x)=-\left(-x+\frac{e^x+1}{1-e^x}\right)$$
$$f(-x)=-f(x)$$

و منه الدالة f فردية. يكفي دراستها على المجال $]0;+\infty[$ و منحناها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم.

ب) حساب النّهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و منه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ج) تبرير أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x+1$ مقارب للمنحنى بجوار $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x-1}=0$

نتيجة :بما أنّ الدالة f فردية فإنّ المستقيم $(d'): y=-x-1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

دراسة وضعية المنحنى (C)بالنسبة للمستقيم (d) :لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)-(-x+1)=\dfrac{2}{e^x-1}$ وبالتالي إذا كان $x<0$ المنحى (C_f)أسفل مستقيمه المقارب المائل.

إذا كان $x>0$ المنحنى(C_f) أعلى مستقيمه المقارب المائل.

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، و $f(x)=-1-\dfrac{2e^x}{(e^x-1)^2}$.

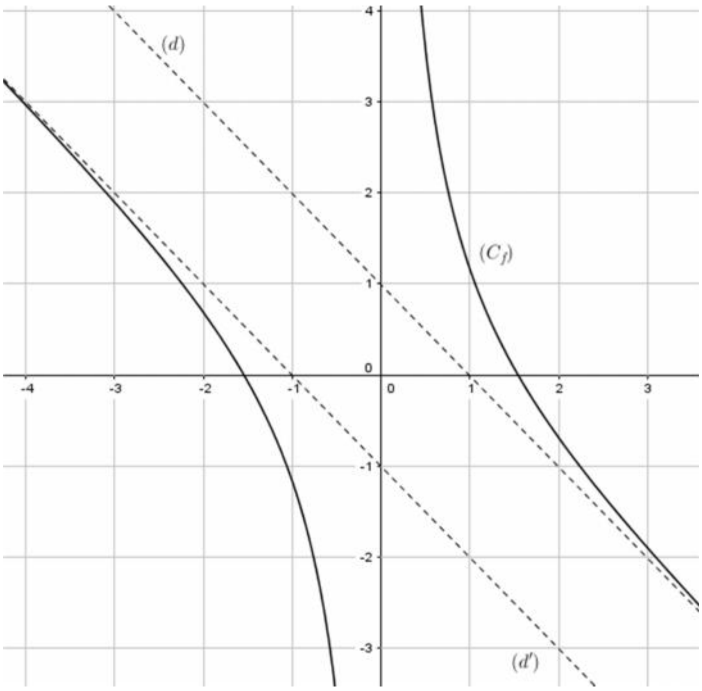
جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

2) تبيين أنّ المنحنى (C_f)يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث:$1<\alpha<2$.تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:$1<\alpha<2$.

الدالة f مستمرة ،متزايدة تماما على المجال $]1;2[$ و $f(1)=1.16$ ، $f(2)=-0.69$

5)الانشاء



المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة: $m-1=\dfrac{2}{e^x-1}$

المعادلة $m-1=\dfrac{2}{e^x-1}$ تكافئ $m=1+\dfrac{2}{e^x-1}$ و منه

$-x+m=-x+1+\dfrac{2}{e^x-1}$ أي: $f(x)=-x+m$

حلول المعادلة هي إذن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيمات (d_m) التي معادلاتها: $y=-x+m$

((d_m) توازي المستقيمين المقاربين المائلين).

قيّم m	عدد و إشارة الحلول
$m\in[-1;1]$	المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$
$m\in]-\infty;-1[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
$m\in]1;+\infty[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

التمرين السابع:

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$،ثمّ تحقق أنّ/ $0{,}36<\alpha<0{,}37$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$، (C_f) تمثيلها البياني.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f'(x)=e^{2x+2}.g(-x)$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ،ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x-1)$ ،ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=-x+1$

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ،نأخذ: $f(-\alpha)\approx 0{,}1$.

6) أ) تحقق أنّ من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

المناقشة:

1) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $g'(x)=-(2+2e^{2x-2})$ ، إذن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ و $]-\infty;+\infty[$ بما أنّ $g(x)\in]-\infty;+\infty[$ و $0\in]-\infty;+\infty[$ و g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في $\mathbb{R}$.

التحقق: $g(0{,}36)=0{,}00196$ و $g(0{,}37)=-0{,}0236$ بما أنّ : $0<g(0{,}36)\times g(0{,}37)$ فإنّ:

$0{,}36<\sim<0{,}37$

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ مبيّنة كما يلي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) 1) أ) من أجل كل عدد حقيقي:

$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}\times g(-x)$$

ب) بما أن $e^{2x+2}>0$ على $\mathbb{R}$ ، فإن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(-x)$

من أجل $x=-\sim$ ، $-x=\sim$ معناه $g(-x)=0$ و منه $f'(-\sim)=0$

من أجل $x\in\left]-\infty;-\sim\right[$ ، $-x\in\left]\sim;+\infty\right[$ معناه $g(-x)<0$ و الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\sim\right[$.

من أجل $x\in\left]-\sim;+\infty\right[$ ، $-x\in\left]-\infty;\sim\right[$ معناه $g(-x)>0$ و الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\sim;+\infty\right[$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^{2x+2}-1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\dfrac{x}{2x+2}}_{\searrow 1/2}\left[\underbrace{(2x+2)e^{2x+2}}_{\searrow 0}\right]=0$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

4) دراسة الوضعية: من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$$f(x)-(-x+1)=xe^{2x+2}$$

بما أن $e^{2x+2}>0$ على $\mathbb{R}$ فإن إشارة $f(x)-(-x+1)$ من إشارة x

من أجل $x=0$ ، $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(0;1)\}$.

من أجل $x\in\left]-\infty;0\right[$ ، (C_f) تحت (Δ) .

من أجل $x\in\left]0;+\infty\right[$ ، (C_f) فوق (Δ) .

5) إنشاء (C_f) على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=10,54$

6) أ) لدينا: $f''(x)=4xe^{2x+2}+4e^{2x+2}$

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-4xe^{2x+2}-4e^{2x+2}$$

و بالتالي: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$

ب) لتكن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

معناه الدالة $x\mapsto 2F(x)+f(x)-f'(x)$ دالة أصلية للدالة : $x\mapsto 1-2x-3e^{2x+2}$ على $\mathbb{R}$

أي: $2F(x)+f(x)-f'(x)=x-2\dfrac{x^2}{2}-3\dfrac{1}{2}e^{2x+2}$

إذن $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-x^2-\dfrac{3}{2}e^{2x+2}-f(x)+f'(x)\right)$ ومنه:

$$F(x)=\frac{1}{2}xe^{2x+2}-\frac{1}{4}e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1$$

التمرين الثامن

(I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$

1) أ) احسب نهايتي الدالة g عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+3-xe^{2x}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايتي الدالة f عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+3$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $(-\infty)$.

ج) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (d).

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ: $f(-3,1).f(-3)<0$ ثمّ فسّر بيانيا هذه النتيجة.

ب) بيّن أنّ المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها حيث: $0,7<\quad<0,8$.

ج) برّر أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

د) أنشئ بعناية المستقيم (d) و المنحنى (C).

المناقشة:

(I) $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}\quad ;D_g=\mathbb{R}$

1)أ) حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^{2x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{2x}(1+x)\right)=-\infty$$

ب) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$g'(x)=-2e^{2x}-\left(2e^{2x}+4xe^{2x}\right)$$

$$g'(x)=-4e^{2x}\left(1+x\right)$$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$-\infty$

2) $g(0)=0$ و إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ مبيّنة كما يلي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$$f(x)=x+3-xe^{2x}\quad ;D_f=\mathbb{R}\quad (II)$$

1)أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}.e^{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-e^{2x}\right)+3\right]=-\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+3)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{2x}=0$ وبالتالي المستقيم $\left(d\right)$ ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب لـ $\left(C\right)$ بجوار $\left(-\infty\right)$.

دراسة الوضعية:

في المجال $]-\infty;0[$:المنحنى $\left(C\right)$أعلى المستقيم $\left(d\right)$.

المستقيم $\left(d\right)$ يقطع المنحنى $\left(C\right)$في النقطة $K(0;3)$.

في المجال $]0;+\infty[$:المنحنى $\left(C\right)$أسفل المستقيم $\left(d\right)$.

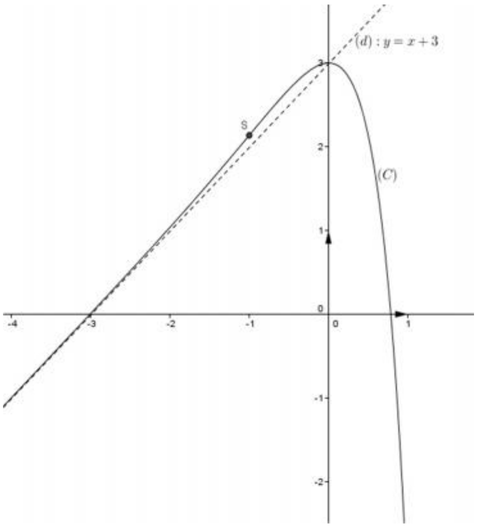
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-(x+3)$		$+$	0	$-$	

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=g(x)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) لدينا: $f(-3)=0,01$ و $f(-3,1)=-0,09$ النتائج مدورة إلى 10^{-2} و بالتالي : $f(-3,1).f(-3)<0$
الدالة f مستمرة على المجال $[-3,1;-3]$ و متزايدة تماما على هذا المجال و بالتالي المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها من المجال $[-3,1;-3]$.



ب) لدينا: $f(0,8)=-0,16$ و $f(0,7)=0,86$ و بالتال $f(0,7).f(0,8)<0$
الدالة f مستمرة على المجال $[0,7;0,8]$ و متناقصة تماما على هذا المجال و بالتالي المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها من المجال $[0,7;0,8]$.

ج) تبرير وجود نقطة الانعطاف
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x)=g'(x)=-4e^{2x}(x+1)$ و إشارة $g'(x)$ مبينة سابقا و منه النقطة $S(-1;f(-1))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

التمرين التاسع

نعتبر المعادلتين التفاضليتين: $(E_1):y'=2y$ و $(E_2):y'=y$

1) أ) حل المعادلتين : $(E_1),(E_2)$

ب) عيّن الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) بحيث : $f_1'(0)=1$

جـ) عيّن الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث : $f_2'(0)=2$

2) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{2x}-2e^{x}$

(C) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) أدرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$

ب) استنتج وجود مستقيم مقارب (d) للمنحنى (C) يطلب تعيين معادلة له.

ج) أحسب $g'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة g.

د) أدرس إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

3) حل المعادلة $g(x)=0$ ، ثمّ أنشئ المنحنى(C).

المناقشة:

1) أ) حل المعادلتين : $(E_1),(E_2)$

المعادلة $(E_1):y'=2y$ حلولها $y=c_1e^{2x}$ حيث $c_1\in\mathbb{R}$

المعادلة : $(E_2):\ y'=y$ حلولها $y=c_2e^{x}$ حيث $c_2\in\mathbb{R}$.

ب) تعيين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) بحيث : $f_1'(0)=1$

$f_1'(0)=1$ معناه : $c_1=\frac{1}{2}$ ومنه الحل الخاص هو : $f_1(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

جـ) تعيين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث : $f_2'(0)=2$

$f_2'(0)=2$ معناه : $c_2=2$ ومنه الحل الخاص : $f_2(x)=2e^{x}$.

2) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{2x}-2e^{x}$

أ) النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ ومنه: $y=0$ معادلة مستقيم مقارب (d) للمنحنى (C) بجوار $(-\infty)$

ج) حساب $g'(x)$

ح) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=2e^{x}\left(e^{x}-1\right)$

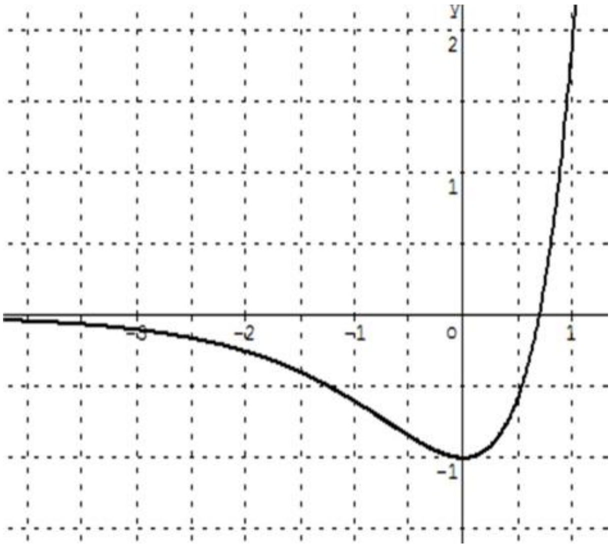
د) إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$ من إشارة : $\left(e^{x}-1\right)$، المبيّنة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول التغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



3) حل العادلة : $g(x)=0$

$g(x)=0$ معناه $\left(e^{x}-2\right)=0$ و بالتالي ، إذن $x=ln2$

المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة $A(ln2;0)$

التمرين العاشر

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=x-2+e^{2x}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) احسب $g'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x و شكّل جدول تغيرات الدالة g .

ج) بيّن أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب لـ (C_g) بجوار $-\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ حيث: $0,2<\sim<0,3$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

3) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\left(x-2\right)^{2}+e^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f\ '(x) = 2g(x)$

ب) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f.

4) نعتبر النقطة $A(2,0)$ و نقطة $M(x, e^x)$ من المنحنى (Γ) الممثل لتغيرات الدالة الأسية.

أ) احسب المسافة AM و تأكد أنّ $AM = \sqrt{f(x)}$

ب) استنتج إحداثي النقطة K التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج) بيّن أنّ : $AK = \sqrt{(2-\sim)(3-\sim)}$، ثمّ عيّن حصرا لـ AK.

5) أنشئ المنحنى (C_f).

المناقشة:

$g(x) = x - 2 + e^{2x}$

حساب النهايات: $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,

حساب $g'(x)$: $g'(x) = 1 + 2e^{2x}$ ، من اجل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) > 0$

إثبات أنّ المستقيم ذا المعادلة $y = x - 2$ مقارب لمنحنى الدالة g بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(g(x) - (x-2)\right) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$$

إثبات أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ حيث: $0,2 < \sim < 0,3$:

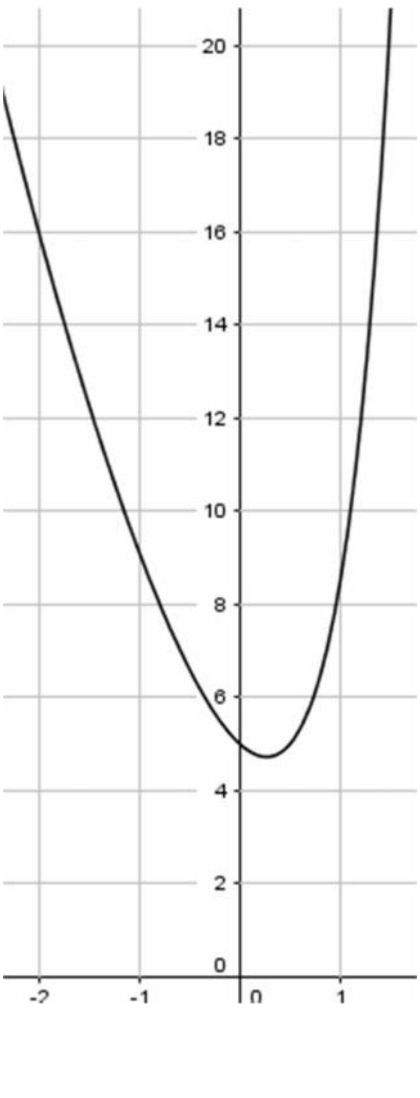
الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $g(0,2) = -0,30$ ، $g(0,2) = 0,12$ و

بالتالي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ حيث: $0,2 < \sim < 0,3$ يحقق:

$\sim - 2 + e^{2\sim} = 0$ أو بعبارة أخرى $\boxed{e^{2\sim} = 2 - \sim}$

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ مبيّنة في الجدول:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$



3) f الدالة العددية المعرّفة $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = (x-2)^2 + e^{2x}$

أ) التحقق أنّ : $f\ '(x) = 2g(x)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي:

$f'(x) = 2x + 4 + 2e^{2x} = 2g(x)$ ومنه اشارة $f\ '(x)$ هي اشارة $g(x)$

ب) نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

حساب $f(\sim)$: $f(\sim) = (\sim - 2)^2 + e^{2x} = (\sim - 2)^2 + 2 - \sim = (\sim - 2)(\sim - 3)$

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ) حساب المسافة AM :

$$AM=\sqrt{(x-2)^2+(e^x)^2}=\sqrt{(x-2)^2+e^{2x}}=\sqrt{f(x)}$$

ب) المسافة AM أصغر ما يمكن من أجل القيمة ~ للمتغير x ومنه $K(\sim;e^{\sim})$

ج) نبيّن أنّ : $AK=\sqrt{(2-\sim)(3-\sim)}$: $AK=\sqrt{f(\sim)}=\sqrt{(2-\sim)(3-\sim)}$

تعيين حصرا لـ AK.

بتوظيف المتباينات والحصر نجد $1,22<AK<1,35$

التمرين الحادي عشر

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=e^x-xe^x+1$

1) جد $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0;+\infty[$، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) برهن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$

ج) برهن أنّ : $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

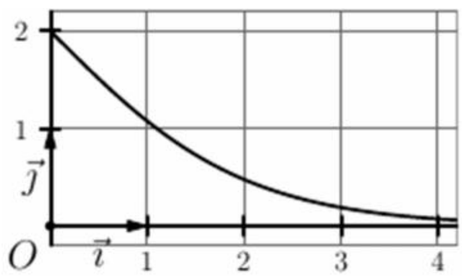
3) عيّن حسب قيّم العدد الحقيقي الموجب x ،إشارة $g(x)$.

II) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$

1) احسب $h'(x)$ ،ثمّ تأكد أن إشارتها من إشارة $g(x)$.استنتج اتجاه تغير الدالة h

III) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل:



$M(x,f(x))$ نقطة من (C)، P نقطة إحداثييها $(x;0)$ ، Q نقطة إحداثييها $(0;f(x))$

1) برهن أنّ مساحة المستطيل $OPMQ$ تكون أكبر ما يمكن عندما تكون فاصلة النقطة M هي α .

2) نفرض أنّ فاصلة النقطة M هي α ؛هل المماس (T) للمنحنى (C) في M النقطة مواز للمستقيم (PQ) ؟

المناقشة

I) $g(x)=e^x-xe^x+1 \quad ; \quad D_g=[0,+\infty[$

1) حساب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^x}_{\to+\infty}\underbrace{(1-x)}_{\to-\infty}+1\right)=-\infty$

2) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0,+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي موجب، $g'(x)=-xe^x$ و $g'(x)\le 0$. الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

ب) إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,+\infty[$:

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$ و تأخذ قيّمها في المجال $]-\infty,2]$

بما أنّ $0\in]-\infty,2]$ و بالتالي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق: $g(\alpha)=0$.

ج) إثبات أنّ: $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$

لدينا مما سبق: $g(\alpha)=0$ و منه: $e^\alpha-\alpha e^\alpha+1=0$ إذن: $e^\alpha(1-\alpha)=-1$ و بالتالي: $e^\alpha=\frac{-1}{(1-\alpha)}=\frac{1}{\alpha-1}$

3) إشارة $g(x)$ على المجال $[0,+\infty[$ مبينة في الجدول:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) $h(x)=\frac{4x}{e^x+1} \quad ; \quad D_h=[0,+\infty[$

1) حساب $h'(x)$

$$h'(x)=\frac{4(e^x+1)-4xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{4(e^x-xe^x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إنّ إشارة $h'(x)$ على المجال $[0,+\infty[$ من إشارة $g(x)$ و بالتالي :

الدالة h متناقصة تماما على المجال $[\alpha,+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $[0,\alpha]$.

III) $f(x)=\frac{4}{e^x+1}$

1) مساحة المستطيل $OPMQ$ هي: $S=OP.OQ=x.f(x)=h(x)$

الدالة h تقبل قيمة حدّية عظمى عند α هي $h(\alpha)$. و بالتالي تكون مساحة المستطيل $OPMQ$ أكبر ما يمكن عندما تكون فاصلة النقطة M هي α.

2) نفرض أنّ فاصلة النقطة M هي α:

إنّ معامل توجيه المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة M هو $f'(\alpha)$ أي: $f'(\alpha)=-4\frac{e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$ و بما أنّ $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$ فإنّ: $f'(\alpha)=-4\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ من جهة أخرى معامل توجيه المستقيم (PQ) هو :

$\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{0-f(\alpha)}{\alpha-0}=-\frac{f(\alpha)}{\alpha}=-4\frac{(\alpha-1)}{\alpha^2}$. نتيجة: المماس (T) و المستقيم (PQ) متوازيان.

تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

1) ادرس إشارة العبارة: $\left(2e^{2x}-5e^{x}+2\right)$ على $\mathbb{R}$.

2) f الدالة العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x)=1+2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) تأكد أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم يمكن كتابة $f\left(x\right)$ على الشكل: $f(x)=2+2x+\dfrac{1}{e^x-1}$

3) أ) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجالي تعريفها.

ب) بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+2$ مقارب لـ(C)بجوار $+\infty$، ثمّ أدرس وضعيته بالنسبة لـ(d).

ج) احسب$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-2x-1\right]$.فسّر النتيجة بيانيا.

4)أ) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، احسب $f'\left(x\right)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثمّ أنشئ المنحنى(C) و مستقيماته المقاربة.

التمرين الثاني

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=4+(x-2)^3e^{-x}$

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=(5-x)(x-2)^2e^{-x}$،مستنتجا إشارتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~حيث $\sim\in\left[0,2;0,3\right]$

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x}{x-2}+e^{-x}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس$(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة تعريفها. ثمّ فسّر نتائجك هندسيا.

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2 ، احسب $f'\left(x\right)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ أنجز جدول تغيراتها. بيّن أنّ المعادلة$f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left]0,6;0,7\right[$

ج) بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

د) نعتبر $\sim=0,27$ ، أنشئ بدقة المنحنى (C) و مستقيماته المقاربة.

3) h الدالة العددية المعرّفة على $\left]-2;2\right[$بالعبارة : $h(x)=f\left(|x|\right)$

أ) بيّن أنّ دالةh زوجية.

ب) أنشئ المنحنى الممثل للدالة h في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

التمرين الثالث:

نذكر أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$

f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $x>0$ ... $f(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ و $f(0)=0$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد .

1) أ) ادرس استمرارية f عند 0.

ب) احسب: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. فسر النتيجة بيانيا .

2) برهن أن المستقيم (Δ)الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب لـ (C_f)بجوار $+\infty$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=\left(\dfrac{1-x}{x^4}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ ، حدّد إشارة $f'(x)$.

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

التمرين الرابع

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :$g(x)=-xe^x+2e^x+1$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

ب) احسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) أ) برهن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في $\mathbb{R}$ ،ثمّ تأكد أنّ $~\in]2,1;2,2[$.

ب) بيّن أنّ : $e^{~}(~-2)=1$

3) من أجل كل عدد حقيقي x ، عيّن إشارة $g(x)$.

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=2+\dfrac{x-1}{e^x+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ج) بيّن أنّ المستقيم(d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) ، ثمّ ادرس وضعيته بالنسبة إلى(d).

2) بيّن أنّ $f(~)=~$ حيث: ~ هو العدد الحقيقي المحصل عليه في السؤال 2) أ).

3) أ) من أجل كل عدد حقيقي x ،احسب $f'(x)$ ، ثمّ تأكد أنّ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f .بيّن أنّ المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $\left]-1,5;-1,4\right[$

4) أنشئ بعناية المنحنى $\left(C\right)$ و مستقيماته المقاربة.

5) h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{x}{e.e^{x}+1}$، $\left(C'\right)$تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) من أجل كل عدد حقيقي x، بيّن أنّ: $h(x)= f\,(x+1)-2$.

ب) بيّن أنّ: $h(\sim -1)=\sim -2$ و أنّ: $h'\,(\sim -1)=0$.

ج) من بين الإجابات الثلاث الآتية توجد إجابة صحيحة واحدة، عيّنها:

المنحنى $\left(C'\right)$ هو صورة المنحنى $\left(C\right)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$ حيث:

1) $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}$ 2) $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$ 3) $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}$

6) أنشئ المنحنى $\left(C'\right)$.

التمرين الخامس:

1) h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(x-1)\,e^{-x}+2$

أ) احسب نهايات الدالة h عند الحدود المفتوحة لمجموعة تعريفها.

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة h.

ج) بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ في المجال $\left]-0,38;-0,37\right[$

د) استنتج إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

2) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+1-x\,e^{-x}$، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) بيّن أنّه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=h(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجموعة تعريفها.

ج) بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

د) حدّد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (d)

هـ) بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

و) بيّن أنّ: $f(\sim)=2\sim+3+\dfrac{2}{\sim -1}$ ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\sim)$.

3) أ) أنشئ المستقيم (d) و المنحنى (C).

ب) عدد حقيقي. (a) مستقيم معادلة له: $y=2x+$.

عيّن قيمة حتى يكون المستقيم (a)مماسا للمنحنى (C).

ج) m وسيط حقيقي. ناقش حسب قيّم m عدد حلول المعادلة: $-\dfrac{x}{e^{x}}+1-m=0$

التمرين السادس:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g\left(x\right)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية.

و $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عين الأعداد a ، b و c بحيث يقبل $\left(C_g\right)$ **مماسا في النقطة** $A(0;-3)$ **معامل** توجيهه 3 و $g\left(\sqrt{3}\right)=0$

II) **نضع** $a=1$ ، $b=0$ و $c=-3$

1) أ) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $\left(C_g\right)$ في النقطة التي فاصلتها 0 .

2)أ) عيّن إحداثيات نقط تقاطع $\left(C_g\right)$ مع محور الفواصل.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن: $g\left(x\right)+2g'\left(x\right)+g''\left(x\right)=2e^{-x}$ ، ثمّ استنتج أنّ لـ $\left(C_g\right)$ نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

3) أ) أنشئ (T) و $\left(C_g\right)$.

ب) m عدد حقيقي موجب تماما.

ناقش بيانيا وحسب قيم العدد m عدد وإشارة حلول المعادلة $\ln(m)-\ln(x^2-3)+x=0$

التمرين السابع:

g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g\left(x\right)=\left(2-x\right)e^x-2$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)$

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x ،احسب $g'(x)$ و حدّد إشارتها.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة g .

3) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلين فقط هما 0 و a .

ب) تحقق أنّ العدد الحقيقي a يحقق: $1<a<2$

4) استنتج إشارة $g\left(x\right)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

الجزء الثاني:

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

إذا كان $x\neq 0$ فإنّ $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{e^x-1}$ و $f\left(0\right)=0$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ) برهن أنّ الدالة f مستمرة عند 0 .

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 .فسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم يكون: $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

4) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجموعة تعريفها.

5) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

6) أثبت أنّ: $f(a)=a(2-a)$ و استنتج حصرا للعدد $f(a)$.

7) نأخذ $a=1{,}6$.أنشئ بدقة المنحنى (C).

التمرين الثامن:

f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)=2$ ؛استنتج أنّ المنحنى البياني (C) يقبل مركز تناظر يطلب تعيين إحداثييه.

2) أ)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا.

3) أ) احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة f و حدّد إشارتها.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

4) برهن أنّ النقطة $S(0;f(0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

5) أ)أنشئ المماس (T) و المنحنى (C).

ب) m وسيط حقيقي. باستعمال المنحنى (C) ناقش حسب قيّم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $(3-m)e^{x}=1+m$.

التمرين التاسع

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=1-x^{2}e^{x-1}$

1) أ) علما أنّ: $\lim\limits_{y\to-\infty} ye^{y}=0$ ، برهن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2}e^{x}=0$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x ،احسب $g'(x)$ و ادرس إشارتها على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة g.

3) احسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=xe^{x-1}+1$ ،(C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) احسب $f'(x)$ ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3) a عدد حقيقي موجب تماما. (T_a) المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة a.

أ) اكتب معادلة للمماس (T_a).

ب) برهن أنّ المماس (T_a) يشمل المبدأ إذا وفقط إذا كان: $1-a^2e^{a-1}=0$.

ج) استنتج أنّه توجد قيمة وحيدة للعدد a بحيث المماس (T_a) يشمل المبدأ و اكتب معادلة له.

د) أنشئ المماس (T_a) من أجل القيمة المحصل عليها في السؤال السابق و المنحنى (C).

التمرين العاشر:

أ) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=1-\left(x^2-2x+2\right)e^{-x}$

1) أ) احسب نهايتي الدالة g عند الحدود المفتوحة من مجال تعريفها.

ب) احسب $g'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة g ثمّ استنتج اتجاه تغيرها. أنجز جدول تغيرات الدالة g

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في $\mathbb{R}$. احسب $g(0,35)\times g(0,36)$ ؛ استنتج حصرا لـ ~

ب) عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x-1+\left(x^2+2\right)e^{-x}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايتي الدالة f عند حدود مجال تعريفها.

ب) احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة f ثمّ استنتج اتجاه تغيرها بالاعتماد على الجزء (أ).

2) بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة : $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C) ،ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة إلى (d).

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة المعدومة، ثمّ تأكد أنّ (T) و (d) متعامدان.

4) أ) بيّن أنّ $f(\sim)=\sim\left(1+2e^{-\sim}\right)$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ $f(\sim)$. أنشئ (T)،(d) و (C).

التمرين الحادي عشر:

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-xe^{x}$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ،ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3) أ)بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب)تحقق أنّ $0{,}5<\alpha<0{,}6$ ،ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f .بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإنّ : $f'(x)=-g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$،ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$ ،ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.(تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)بجوار $(-\infty)$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة إلى (Δ).

5) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث: $-1{,}6<x_1<-1{,}5$ و $1{,}5<x_2<1{,}6$.

ب)أنشئ (Δ) و (C_f).

6) a و b عدان حقيقيان. h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x)=(ax+b)e^{x}$.

أ)عيّن a و b حتى تكون الدالة h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.