بطاقة طرائق

معادلات و متراجحات من الدرجة الثانية

المحور : مراجعة

المستوى : نهائي علوم و رياضيات

كمال حامدي

الأهداف

عزيزي الطالب ... نتوقع بعد دراسة هذه البطاقة أن تكون قادرا على :

- ✔ حل معادلة من الدرجة الثانية باستعمال المميّز أو بدونه
- ✔ تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية
- ✔ دراسة إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية
- ✔ حل متراجحة من الدرجة الثانية

1 مصطلحات

ليكن $a \neq 0$. نُسمّي :

ثلاثي حدود من الدرجة الثانية : العبارة ax^2+bx+c

معادلة من الدرجة الثانية : كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل :

$ax^2+bx+c=0$

متراجحة من الدرجة الثانية :

كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل : $ax^2+bx+c \geqslant 0$

(يُمكن استبدال المتباينة $\geqslant$ بـ : $>$ أو $\leqslant$ أو $<$)

دالة كثير حدود من الدرجة الثانية :

كل دالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ يُمكن كتابتها على الشكل :

$x \mapsto f(x)=ax^2+bx+c$

قطع مكافئ : التمثيل البياني لدالة كثير حدود من الدرجة الثانية

المميز Δ : المقدار $\Delta=b^2-4ac$

جذور ثلاثي حدود (أو حلول معادلة من الدرجة الثانية) :

إذا كان $\Delta \geqslant 0$ فإنّ لـ ax^2+bx+c جذرين متمايزين هما :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية :

إذا كان $\Delta \geqslant 0$ فإنّ: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

و إذا كان $\Delta<0$ فإنّه لا يمكن تحليل ax^2+bx+c

2 حل معادلات من الدرجة الثانية

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية دون استعمال المميّز Δ:

1) $5x^2+3x=0$

2) $2x^2-3=0$

3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=-2$

حل

1) حساب المميّز Δ غير ضروري في هذه الحالات. بالنسبة إلى المعادلة الأولى يُمكن استعمال التحليل :

$$x(5x+3)=0$$

جداء عاملين معدوم إذا و فقط إذا كان أحدهما معدوم :

$$x=0 \quad \text{أو} \quad 5x+3=0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي :

$$S=\left\{\frac{-3}{5};0\right\}$$

2) يّمكن كتابة المعادلة الثانية على الشكل :

$$\left(\sqrt{2}x\right)^2-1^2=0$$

حسب المتطابقة الشهيرة : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ و من أجل $a=\sqrt{2}x$ و $b=1$ ، نحصل :

$$(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)=0$$

و منه :

$$S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

3) نُشير إلى أنّ المعادلة الثالثة معرفة من أجل $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

بتوحيد المقامين :

$$\frac{(x-1)+x}{x(x-1)}=-2$$

بضرب الطرفين في $x(x-1)\neq 0$:

$$2x-1=-2x(x-1)$$

أي :

$$2x^2-1=0$$

و منه مجموعة حلول المعادلة الثالثة هي :

$$S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

بطاقة طرائق

معادلات و متراجحات من الدرجة الثانية

المحور : مراجعة

المستوى : نهائي علوم و رياضيات

كمال حامدي

3 حل متراجحات من الدرجة الثانية

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $-3x^2+5x+2\leqslant 0$

2) $2x^2+3x+4>0$

3) $x^2-2\sqrt{2}x+2\leqslant 0$

1) لنحسب مميّز كثير الحدود $-3x^2+5x+2$:

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times(-3)\times 2=25+24=49$$

المميّز موجب تماما. إذن لكثير الحدود جذرين متمايزين هما:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+7}{-6}=-\frac{1}{3}$$

و

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-7}{-6}=2$$

يوجد على الأقل ثلاثة طرق لحل المتراجحة :

الطريقة الأولى : نحلل كثير الحدود $-3x^2+5x+2$ ثمّ نُشكل جدول الإشارة :

$$-3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)\leqslant 0$$

$$(-3x-1)(x-2)\leqslant 0$$

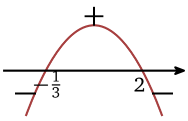
x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$-3x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-3x-1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الطريقة الثانية : نُذكر بالقاعدة " إشارة ثلاثي حدود هي من إشارة a إلاّ ما بين جذريه في حالة وجودهما"

في حالتنا، $a=-3$. إذن ثلاثي الحدود سالب تماما إلاّ ما بين الجذرين $-\frac{1}{3}$ و 2 فهو موجب تماما. نحصل عندئذ على جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$(-3x-1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الطريقة الثالثة : نُعيّن إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية بتمثيل القطع المكافئ. في حالتنا القطع المكافئ يقطع محور الفواصل و مفتوح إلى الأسفل لأنّ $a<0$.



نحصل كذلك على نفس جدول الإشارة السابق

تسمح لنا الطرق الثلاثة استنتاج مجموعة حلول المتراجحة:

$$S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[2;-\infty\right[$$

2) لنحسب مميّز كثير الحدود $2x^2+3x+4$: $\Delta=3^2-4\times 2\times 4=-23$. Δ سالب تماما، إذن ليس لكثير الحدود جذور (فهو إذن غير قابل للتحليل) و إشارته هي من إشارة a و بما أنّ $a=3$ فكثير الحدود موجب تماما.

مجموعة حلول المتراجحة $2x^2+3x+4>0$ هي إذن : $S=\mathbb{R}$

3) بالنسبة إلى كثير الحدود $x^2-2\sqrt{2}x+2$ ، $\Delta=0$.

إذن لـ $x^2-2\sqrt{2}x+2$ جذرا مضاعفا (جذران متساويان) هو

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

(تحليله هو $x^2-2\sqrt{2}x+2=(x-\sqrt{2})^2$) و إشارته هي من إشارة $a=1$. الجدول التالي يُعطينا وفق قيم العدد الحقيقي x إشارة $x^2-2\sqrt{2}x+2$

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2-2\sqrt{2}x+2$		$+$	0	$+$	

و مجموعة حلول المتراجحة الثالثة هي $S=\{\sqrt{2}\}$

تمارين مقترحة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $(x-2)(x+3)=(x-2)(4x+1)$

2) $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$

3) $-x^2+2x-5\leqslant 0$

4) $\frac{x^2+4x+4}{-x^2+5x+6}\leqslant 0$

5) $\frac{-2x}{x+1}\geqslant\frac{4x+3}{x-2}$