# بطاقة طرائق

## معادلات و متراجحات من الدرجة الثانية

المحور : مراجعة

المستوى : نهائي علوم و رياضيات

كمال حامدي

### الأهداف

عزيزي الطالب ... نتوقع بعد دراسة هذه البطاقة أن تكون قادرا على :

- ✔ حل معادلة من الدرجة الثانية باستعمال المميّز أو بدونه
- ✔ تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية
- ✔ دراسة إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية
- ✔ حل متراجحة من الدرجة الثانية

## 1 مصطلحات

ليكن $a \neq 0$. نُسمّي :

**ثلاثي حدود من الدرجة الثانية** : العبارة $ax^2+bx+c$

**معادلة من الدرجة الثانية** : كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل :

$ax^2+bx+c=0$

**متراجحة من الدرجة الثانية** :

كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل : $ax^2+bx+c \geqslant 0$

( يُمكن استبدال المتباينة $\geqslant$ بـ : $>$ أو $\leqslant$ أو $<$ )

**دالة كثير حدود من الدرجة الثانية** :

كل دالة $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ يُمكن كتابتها على الشكل :

$x \mapsto f(x)=ax^2+bx+c$

**قطع مكافئ** : التمثيل البياني لدالة كثير حدود من الدرجة الثانية

**المميز** $\Delta$ : المقدار $\Delta=b^2-4ac$

**جذور ثلاثي حدود** (أو حلول معادلة من الدرجة الثانية) :

إذا كان $\Delta \geqslant 0$ فإنّ لـ $ax^2+bx+c$ جذرين متمايزين هما :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

**تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية** :

إذا كان $\Delta \geqslant 0$ فإنّ: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

و إذا كان $\Delta<0$ فإنّه لا يمكن تحليل $ax^2+bx+c$

## 2 حل معادلات من الدرجة الثانية

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية دون استعمال المميّز $\Delta$:

1) $5x^2+3x=0$

2) $2x^2-3=0$

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-2$

### حل

1) حساب المميّز $\Delta$ غير ضروري في هذه الحالات. بالنسبة إلى المعادلة الأولى يُمكن استعمال التحليل :

$$x(5x+3)=0$$

جداء عاملين معدوم إذا و فقط إذا كان أحدهما معدوم :

$$x=0 \quad \text{أو} \quad 5x+3=0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي :

$$S=\left\{\frac{-3}{5};0\right\}$$

2) يّمكن كتابة المعادلة الثانية على الشكل :

$$\left(\sqrt{2}x\right)^2-1^2=0$$

حسب المتطابقة الشهيرة : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ و من أجل $a=\sqrt{2}x$ و $b=1$ ، نحصل :

$$(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)=0$$

و منه :

$$S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

3) نُشير إلى أنّ المعادلة الثالثة معرفة من أجل $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

بتوحيد المقامين :

$$\frac{(x-1)+x}{x(x-1)}=-2$$

بضرب الطرفين في $x(x-1)\neq 0$ :

$$2x-1=-2x(x-1)$$

أي :

$$2x^2-1=0$$

و منه مجموعة حلول المعادلة الثالثة هي :

$$S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

## 3 حل متراجحات من الدرجة الثانية

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $-3x^2+5x+2\leqslant 0$

2) $2x^2+3x+4>0$

3) $x^2-2\sqrt{2}x+2\leqslant 0$

1) لنحسب مميّز كثير الحدود $-3x^2+5x+2$ :

$$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times(-3)\times 2 = 25+24 = 49$$

المميّز موجب تماما. إذن لكثير الحدود جذرين متمايزين هما:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{-6} = -\frac{1}{3}$$

و

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{-6} = 2$$

يوجد على الأقل ثلاثة طرق لحل المتراجحة :

**الطريقة الأولى : نحلل كثير الحدود $-3x^2+5x+2$ ثمّ نُشكل جدول الإشارة :**

$$-3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)\leqslant 0$$

$$(-3x-1)(x-2)\leqslant 0$$

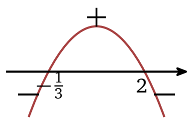
| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(-3x-1)(x-2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**الطريقة الثانية : نُذكر بالقاعدة " إشارة ثلاثي حدود هي من إشارة $a$ إلاّ ما بين جذريه في حالة وجودهما"**

في حالتنا، $a=-3$ . إذن ثلاثي الحدود سالب تماما إلاّ ما بين الجذرين $-\frac{1}{3}$ و $2$ فهو موجب تماما. نحصل عندئذ على جدول الإشارة التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-3x-1)(x-2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**الطريقة الثالثة : نُعيّن إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية بتمثيل القطع المكافئ**. في حالتنا القطع المكافئ يقطع محور الفواصل و مفتوح إلى الأسفل لأنّ $a<0$.




نحصل كذلك على نفس جدول الإشارة السابق

تسمح لنا الطرق الثلاثة استنتاج مجموعة حلول المتراجحة:

$$S = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[2;-\infty\right[$$

2) لنحسب مميّز كثير الحدود $2x^2+3x+4$ :

$\Delta = 3^2-4\times 2\times 4 = -23$ . $\Delta$ سالب تماما، إذن ليس لكثير الحدود جذور ( فهو إذن غير قابل للتحليل ) و إشارته هي من إشارة $a$ و بما أنّ $a=3$ فكثير الحدود موجب تماما.

مجموعة حلول المتراجحة $2x^2+3x+4>0$ هي إذن : $S=\mathbb{R}$

3) بالنسبة إلى كثير الحدود $x^2-2\sqrt{2}x+2$ ، $\Delta=0$ .

إذن لـ $x^2-2\sqrt{2}x+2$ جذرا مضاعفا (جذران متساويان) هو

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

( تحليله هو $x^2-2\sqrt{2}x+2=(x-\sqrt{2})^2$ ) و إشارته هي من إشارة $a=1$ . الجدول التالي يُعطينا وفق قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $x^2-2\sqrt{2}x+2$

| $x$ | $-\infty$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2\sqrt{2}x+2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

و مجموعة حلول المتراجحة الثالثة هي $S=\{0\}$

### تمارين مقترحة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $(x-2)(x+3)=(x-2)(4x+1)$

2) $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ 3) $-x^2+2x-5\leqslant 0$

4) $\frac{x^2+4x+4}{-x^2+5x+6}\leqslant 0$ 5) $\frac{-2x}{x+1}\geqslant\frac{4x+3}{x-2}$