

## النهايات و الاستمرارية

2017-2018

## 1 النهايات

## 1.1 العمليات على النهايات

## تطبيق 1 ☆☆☆☆☆

شكل جدول التغيرات مع إبراز النهايات لكل دالة من الدوال  
 $x \mapsto -3x + 7$  و  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ،  $x \mapsto x^2$  ،  $x \mapsto \sqrt{x}$

## تطبيق 2 ☆☆☆☆☆

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بجدول تغيراتها التالي :

$x$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f$	$2$		$3$	$0$

1. ما هي نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  ؟ عند  $-\infty$
2. فسر هندسيا هذه النتائج
3. اقترح تمثيلا بيانيا لهذه الدالة

## تطبيق 3 ☆☆☆☆☆

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بجدول تغيراتها التالي :

$x$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f$	$+\infty$		$+\infty$	$2$

1. ما هي مجموعة تعريف الدالة  $f$  ؟

2. ما هي النهايات المعطاة في هذا الجدول ؟

3. اقترح تمثيلا بيانيا لهذه الدالة

## تطبيق 4 ☆☆☆☆☆

عيّن نهايات الدالة  $f$  عند  $\alpha$  في كل حالة من الحالات التالية

1.  $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$  عند  $\alpha = +\infty$  و عند  $\alpha = -\infty$

2.  $f(x) = (x-1)x^2$  عند  $\alpha = +\infty$

3.  $f(x) = \frac{2x}{(x+4)^2}$  عند  $\alpha = +\infty$  و عند  $\alpha = -4$

4.  $f(x) = \frac{2x+1}{3x-6}$  عند  $\alpha = +\infty$  ، عند  $\alpha = -\infty$  و  $\alpha = 2$

## تطبيق 5 ☆☆☆☆☆

عيّن نهايات الدالة  $f$  عند  $\alpha$  في كل حالة من الحالات التالية

1.  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$  عند  $\alpha = +\infty$

2.  $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$  عند  $\alpha = +\infty$

3.  $f(x) = \frac{2x}{\sin x}$  عند  $\alpha = 0$

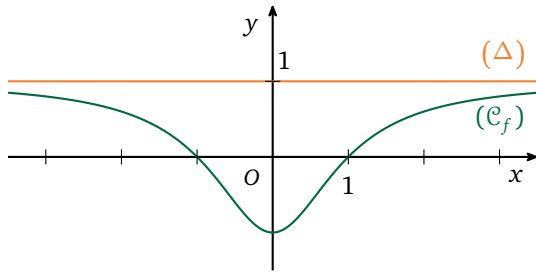
4.  $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$  عند  $\alpha = 0$

## تطبيق 6 ☆☆☆☆☆

$f$  هي الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$  بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{-x^2 + x + 2}$$

ادرس نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها



g هي الدالة المعرّفة بالعبارّة  $g(x) = \frac{1}{g(x)}$  وليكن  $(C_g)$  تمثيلها البياني

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة g
2. عيّن نهايات g عند أطراف مجموعة تعريفها مستتجا المستقيمت المقاربة للمنحنى  $(C_g)$

### تطبيق 12

1. لتكن الدالة g المعرّفة على  $\mathbb{R} - \{3\}$  كما يلي :

$$g(x) = 4 + \frac{5}{x-3}$$

أثبت أنّ المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = 4$  هو مقارب للمنحنى  $(C_g)$  عند  $+\infty$

2. لتكن الدالة h المعرّفة على  $\mathbb{R} - \{3\}$  كما يلي :

$$h(x) = \frac{4x+5}{x-3}$$

أثبت أنّ المنحنى  $(C_h)$  الممثل للدالة h يقبل مستقيما مقاربا أفقيا عند  $-\infty$

### تطبيق 13

f هي الدالة المعرّفة على  $\mathbb{R}$  لها جدول التغيّرات التالي :

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
f	$+\infty$	0	-2	0

1. ما هي نهايات الدالة f عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$
2. لتكن الدالة g حيث :  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  هو تمثيلها البياني.
  - (أ) عيّن مجموعة تعريف الدالة g
  - (ب) عيّن نهايات الدالة g عند  $-\infty$  ، عند 3 ( من اليمين و من اليسار ) و عند  $+\infty$
  - (ج) استنتج وجود مستقيمت مقاربة للمنحنى  $(C_g)$

### تطبيق 7

- لتكن الدالة f المعرّفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$
1. عيّن نهاية الدالة f عند  $-\infty$
  2. عيّن نهاية الدالة f عند  $+\infty$
  3. لتكن الدالة g المعرّفة على  $\mathbb{R} - \{2\}$  كما يلي :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x-2}$$

عيّن نهاية الدالة عند 2

### تطبيق 8

f هي الدالة المعرّفة على  $]-1; +\infty[$  بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

1. أثبت أنّه يُمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل  $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$
2. عيّن نهايتي الدالة f عند 1 و عند  $+\infty$

### تطبيق 9

$$1. \text{ عيّن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}}$$

$$2. \text{ عيّن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x\sqrt{x})$$

$$3. \text{ عيّن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

### 2.1 المستقيمت المقاربة

### تطبيق 10

f هي الدالة المعرّفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$  هو تمثيلها البياني.

1. أثبت أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$
2. ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى هذا المستقيم المقارب

### تطبيق 11

في الشكل الموالي  $(C_f)$  هو التمثيل البياني لدالة f معرّفة على  $\mathbb{R}$  و  $(\Delta)$  هو المستقيم المقارب لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$

## تطبيق 14



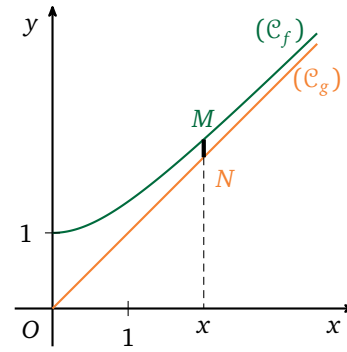
$f$  و  $g$  هما الدالتان المعرفتان على  $[0; +\infty[$  بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ و } g(x) = x$$

$(C_f)$  و  $(C_g)$  هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين  $f$  و  $g$  في معلم متعامد و متجانس.  $M$  و  $N$  هما على الترتيب

النقطتان من  $(C_g)$  و  $(C_f)$  فاصلتهما  $x$  مع  $x \geq 0$

نرمز  $h(x)$  للمسافة  $MN$



1. أعط تخميناً لنهاية الدالة  $h$  عند  $+\infty$

2. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x, x \geq 0$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x, x > 0$

$$0 < h(x) \leq \frac{1}{2x}$$

4. استنتج نهاية الدالة  $h$  عند  $+\infty$

### 3.1 نهاية دالة مركبة

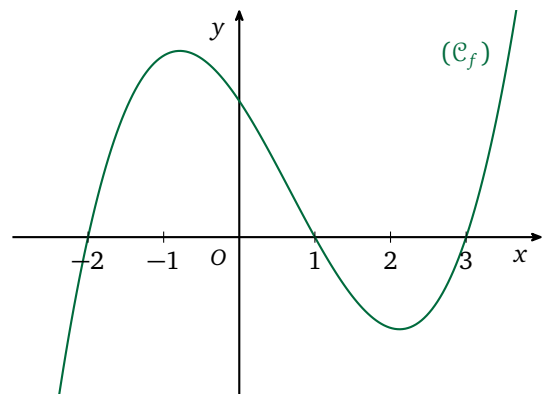
3.1

## تطبيق 15



1. هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$(C_f)$  في الشكل الموالي هو تمثيلها البياني.



$k$  هي الدالة حيث :  $k(x) = \sqrt{f(x)}$ . عيّن مجموعة تعريف

الدالة  $k$  و نهاياتها عند أطراف مجموعة تعريفها

2. هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+2}$  و  $g$

هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ :  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

عيّن نهاياتها عند أطراف مجموعة تعريفها

## تطبيق 16



$f$  هي الدالة المعرفة على  $[1; +\infty[$  بما يلي :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-3x}{1-x}}$$

$(C_f)$  هو تمثيلها البياني. برّر أنّ الدالة  $f$  معرفة على المجال

$[1; +\infty[$  و عيّن نهاياتها عند 1 و عند  $+\infty$ .

استنتج وجود مستقيمين مقاربين للمنحنى  $(C_f)$

## تطبيق 17



$g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  تحقق :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ و } g(0) = 1$$

و  $f$  هي الدالة المعرفة على  $[0; +\infty[$  بما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم

المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. عيّن نهاية الدالة  $f$  عند 0. فسر النتيجة هندسيا

2. عيّن نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ . فسر النتيجة هندسيا

### 4.1 النهايات بالمقارنة

4.1

## تطبيق 18



لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x + \cos x$

1. برّر أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x, x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$

فسر هندسيا هذا الحصر

2. عيّن نهايات الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$

## تطبيق 19



$g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = x^2 - \sin x$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x, g(x) \geq x^2 - 3$

2. استنتج نهاية الدالة  $g$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$

### تطبيق 20

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$$

2.  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f(x) = \frac{x+2}{2 - \cos x}$$

(أ) ادرس نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$

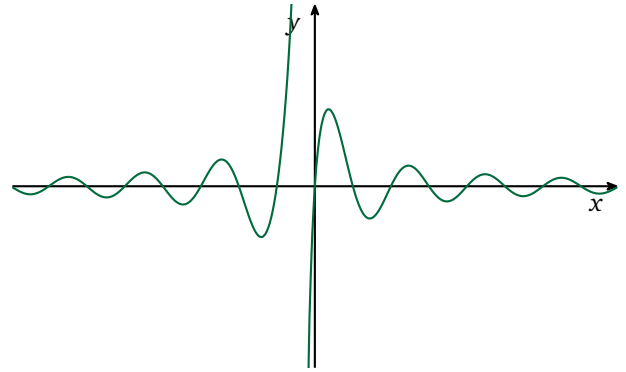
(ب) ادرس نهاية الدالة  $f$  عند  $-\infty$

### تطبيق 21

$f$  هي الدالة المعرفة على  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$  بـ :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$$

الشكل التالي هو تمثيلها البياني



1. أعط تخميناً لنهاية الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$

2. أثبت صحة هذه التخمينات باستعمال مبرهنة الحصر

## 2 الاستمرارية

### تطبيق 22

1.  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

هل الدالة مستمرة على  $\mathbb{R}$  ؟

2.  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

هل الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  ؟

### تطبيق 23

عَيِّن عدد الحلول في  $\mathbb{R}$  للمعادلة  $2x^3 - 3x^2 + 0,5 = 0$ .  
هذه المعادلة تقبل حلاً سالباً. أعط حصرًا له في مجال سعته  
0,1

### تطبيق 24

$f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$   
بعد دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ ، أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$   
تقبل بالضبط حلين في المجال  $]-\infty; 4]$

### تطبيق 25

نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  المرفقتان على المجال  $]-\infty; +\infty[$  بما يلي :

$$g(x) = \frac{2}{x} \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

و ليكن  $(C_f)$  و  $(C_g)$  تمثيليهما البيانيين

بيِّن أن  $(C_f)$  و  $(C_g)$  يتقاطعان في نقطة  $A$  فاصلتها  $x_0$  حيث  
 $1 < x_0 < 2$

## 3 للتحقق ...

### تطبيق 26

أعط عبارة دالة ناطقة حيث مجموعة تعريفها هي :

$$]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

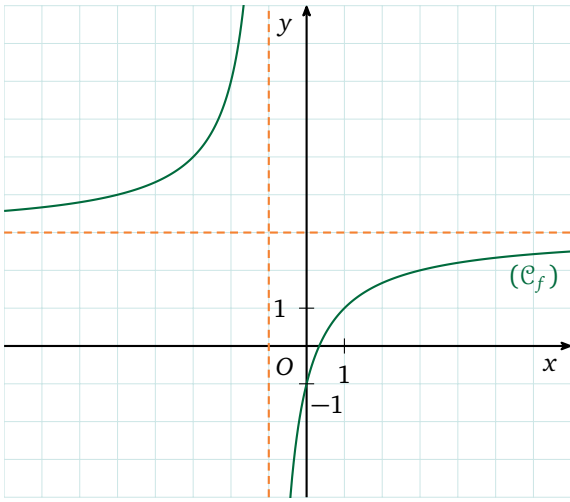
و تمثيلها البياني يقبل مستقيمين  
مقاربيين معادلاتيهما هي  $x = 3$  و  $y = 5$

### تطبيق 27

عَيِّن عدد حلول المعادلة :  $0,25x^4 - x^3 + 3x - 1 = 0$

### تطبيق 28

ما هو عدد نقط تقاطع منحنى الدالة مكعب مع مستقيماً ممثلاً  
لدالة تآلفية ؟



عَيِّن عبارة  $f(x)$

### تطبيق 35

$f$  دالة مستمرة على المجال  $[a; b]$  بحيث

$$f(b) = b^2 \quad \text{و} \quad f(a) = ab$$

بيِّن أنَّه يوجد عدد حقيقي  $c$  من  $[a; b]$  بحيث  $f(c) = bc$

### تطبيق 36

$f$  دالة مستمرة على المجال  $[0; 1]$  بحيث

$$f(1) = 1 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

بيِّن أنَّه يوجد عدد حقيقي  $c$  من  $]0; 1[$  بحيث  $f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

### تطبيق 37

$n$  عدد طبيعي غير معدوم

1. بيِّن أنَّ المعادلة  $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$  تقبل حلا محصورا بين

$$\frac{2n}{n+1} \quad \text{و} \quad 2$$

2. هل المعادلة  $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$  تقبل حلا في  $\mathbb{R}$ .

إذا كان الجواب نعم عَيِّن حصرا لهذا الحل ؟

### تطبيق 29

$a$  عدد حقيقي.  $f_a$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$f_a(x) = x^2 + a$ . ناقش، حسب قيم  $a$ ، اتجاه التغيّر و نهايات

الدالة  $g_a$  المعرفة بـ :  $g_a(x) = \frac{1}{f_a(x)}$

### تطبيق 30

1. ليكن  $a$  عدد طبيعي غير معدوم و  $u_a$  الدالة المعرفة على

$$u_a(x) = \frac{1}{x-a} \quad \text{بـ} \quad \mathbb{R} - \{a\}$$

أدرس اتجاه تغيّر الدالة  $u_a$  و عَيِّن نهاياتها عند أطراف

مجموعة تعريفها

2. عَيِّن عدد حلول المعادلة  $(E)$  :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = 0$$

### تطبيق 31

ما هي قيم العدد الحقيقي  $k$  التي من أجلها يكون للمعادلة

$$x^3 - 3x + k = 0 \quad \mathbb{R} \text{ حلا وحيدا في}$$

### تطبيق 32

ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير معدوم.

ما هو عدد حلول المعادلة  $x^n(1-x) = 1$  ؟

### تطبيق 33

ليكن  $a$  عدد حقيقي و  $f_a$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + a$$

أدرس حسب قيم العدد الحقيقي  $a$  إشارة  $f_a(x)$

### تطبيق 34

ملاحظة تُسمّى دالة تناظرية كل دالة يُمكن كتابتها على الشكل :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{مع} \quad a, b, c, d \text{ أعداد حقيقية حيث} \quad c \neq 0 \quad \text{و} \quad ad - bc \neq 0$$

تمثيلها البياني هو قطع زائد

أعطي في الشكل الموالي  $(C_f)$  التمثيل البياني لدالة تناظرية  $f$

مع مستقيميّه المقاربين