نهائي علوم و رياضيات

السلسلة 01

النهايات و الاستمرارية

2017-2018

أوغسطيس لويس كوشي (**Augustin Louis Cauchy**) عالم رياضيات و فيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789 م إلى 1857 م . كان لأعماله التي تميّزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات ، و بصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الاستمرارية، و طوّر نظرية الدوال ذات متغيّرات عقدية (مركبة).

شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس (**Laplace**) و العلم لاغرانج (**Lagrange**) و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا .
بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفي مع حفيد تشارلز العاشر .لقد نشر ما مجموعة عملا، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعداد و المرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الظوء.

في هذا المحور

- ◁ النهايات (تعاريف)
- ◁ العمليات على النهايات
- ◁ حل معادلات و متراجحات من الدرجة الثانية
- ◁ النهايات بالمقارنة
- ◁ نهاية دالة مركبة
- ◁ المستقيم المقارب المائل
- ◁ مفهوم الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال
- ◁ الدوال المستمرة و حل المعادلات (مبرهنة القيم المتوسطة)
- ◁ تمارين

BAC 2018

التمرين 1

★★☆☆☆

الجزء الأول g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=3x^3-4x-8$

1. عيّن نهايات الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$
2. عيّن عبارة $g'(x)$
3. ادرس، حسب قيم x، إشارة $g'(x)$ و استنتج اتجاه تغيّر الدالة g
4. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. تحقق أنّ : $1{,}7<\alpha<1{,}8$
5. عيّن حسب قيم x إشارة $g(x)$

الجزء الثاني f هي الدالة المعرّفة على $I=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{3}{4}x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$
2. f' هي الدالة المشتقة للدالة f ، أثبت أنّ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{4x^3}$
3. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f
4. (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{3}{4}x+1$
   - (ا) ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ)
   - (ب) d هي الدالة المعرّفة على I بـ : $d(x)=f(x)-\left(\dfrac{3}{4}x+1\right)$
     احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}d(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}d(x)$. فسر هندسيا هذه النتائج
5. أنشئ (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$

التمرين 2

★★☆☆☆

1. لتكن الدالة u المعرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $u(x)=4x\sqrt{x}-5$
   - (ا) برّر أنّ الدالة u متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$
   - (ب) عيّن نهاية الدالة u عند $+\infty$
   - (ج) بيّن أنّ المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $1{,}16$ و $1{,}17$
   - (د) استنتج حسب قيم x ، إشارة $u(x)$
2. لتكن الدالة f المعرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x^2-3-5\sqrt{x}$
   - (ا) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;+\infty[$ ، $f(x)=x\left(x-\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)-3$
   - (ب) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$
   - (ج) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{u(x)}{2\sqrt{x}}$
   - (د) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[1;+\infty[$

التمرين 3

☆☆☆☆☆

الجزء الأول لتكن الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-3x^4+3x^3+1$

1. عيّن نهايات الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g
3. أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ثمّ عيّن حصرا سعته 0,1 لكل حل
4. عيّن حسب قيم x إشارة $g(x)$

الجزء الثاني لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=2+\frac{4x-3}{x^4+1}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. (أ) أثبت أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُوازي محور الفواصل
   (ب) ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ)
2. (أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{(x^4+1)^2}$
   (ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها
   (ج) أنشئ (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$
   (د) لتكن h دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ ، $2\leqslant h(x)\leqslant f(x)$
   عيّن نهاية الدالة h عند $+\infty$ و اقترح تمثيلا بيانيا للدالة h على $]0;+\infty[$

التمرين 4

☆☆☆☆☆

لتكن g الدالة املعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=f(x)-xf(x)+1$$

حيث f هي الدالة الموجبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق : $f(0)=1$ ، $f'(x)=f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

1. عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكل جدول تغيّراتها
3. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$
4. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$
5. أثبت المساواة : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

BAC 2018

التمرين 5

1. f هي دالة معرّفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
   (ا) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geqslant 0$، $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$
   (ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geqslant 0$، $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   هل للدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟
2. h هي الدالة المعرّفة من أجل $x>1$ بـ : $h(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$
   (ا) بيّن أنّه لمّا يكون $x>1$ يكون : $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$
   (ب) استنتج أنّ ثمّ عيّن $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

التمرين 6

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (وحدة الرسم : 1 cm)

نعتبر الدالة u المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

و ليكن $(\mathcal{C}_u)$ تمثيلها البياني

1. (ا) عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$
   (ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا :
   $$u(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
2. (ا) أثبت أنّ $[u(x)+2x]$ يؤول إلى 0 لمّا يؤول x إلى $+\infty$
   (ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا $u(x)>0$. استنتج إشارة $[u(x)+2x]$
   (ج) فسر هذه النتائج بيانيا
3. نقبل أنّ الدّالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_u)$ و مستقيمه المقارب المائل
4. $(\mathcal{C}_v)$ هو التمثيل البياني للدالة v المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
   $$v(x)=-\sqrt{x^2+1}-x$$
   و $(\mathcal{H})$ هو اتحاد المنحنيين $(\mathcal{C}_u)$ و $(\mathcal{C}_v)$
   تحقق أنّ للمنحنى $(\mathcal{H})$ المعادلة : $y^2+2xy-1=0$