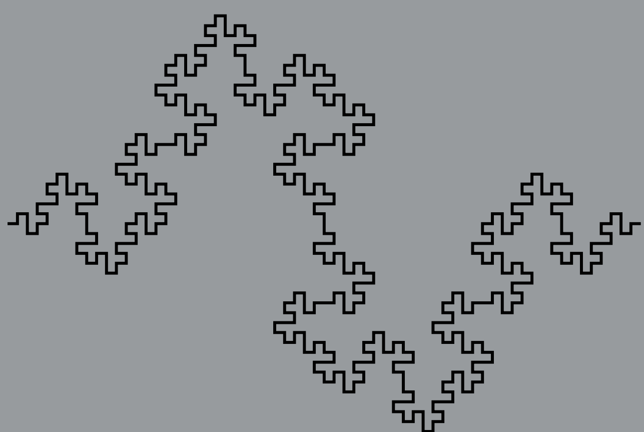
نهائي علوم و رياضيات

2008 - 2017

# حوليات
## الهندسة في الفضاء

كمال حامدي



9

# حوليات البكالوريا

## علوم – رياضيات – تقني رياضي

# الهندسة في الفضاء

حامدي كمال

آخر تحديث : 17 جويلية 2017

# المحتويات

# شعبة علوم

## تمرين 1 — علوم – 2017 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ ذا المعادلة $x-y+z+2=0$ و المستقيم $(\mathcal{D})$ المعرف بـ : $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$

**1** عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\mathcal{D})$

**2** جد معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P}')$ الذي يشمل $A$ و يوازي $(\mathcal{P})$

**3** أثبت أنّ $(\mathcal{D})$ يقطع $(\mathcal{P}')$ في النقطة $A'$ حيث $A'(6;3;1)$

**4** عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل $A$ و يوازي $(\mathcal{P})$ و يقطع $(\mathcal{D})$

## تمرين 2 — علوم – 2017 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$

**1** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا، ثمّ تحقّق أنّ : $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$

**2** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ العمودي على المستوي $ABC$ و الذي يشمل المبدأ $O$

**3** جد إحداثيات $H$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $ABC$

**4** بيّن أنّ $(BH)$ عمودي على $(AC)$ ، ثمّ استنتج أنّ $H$ هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث $ABC$

## تمرين 3 — علوم – 2016 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

نعتبر المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ معادلتيهما على الترتيب : $2x+y-z+1=0$ و $x-2y+z-2=0$

**1** بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ متقاطعان

**2** عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\mathrm{d}(M,(\mathcal{P}))=\mathrm{d}\left(M,(\mathcal{P}')\right)$ حيث $\mathrm{d}(M,(\mathcal{P}))$ هي المسافة بين النقطة $M$ و المستوي $(\mathcal{P})$ و $\mathrm{d}\left(M,(\mathcal{P}')\right)$ هي المسافة بين النقطة $M$ و المستوي $(\mathcal{P}')$

**3** تحقق أنّ النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$

**4** $H$ و $H'$ المسقطان العموديان للنقطة $A$ على المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ على الترتيب

**(ا)** جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين $(AH)$ و $(AH')$

**(ب)** استنتج إحداثيات كل من النقطتين $H$ و $H'$

**5** عيّن إحداثيات النقطة $I$ منتصف القطعة $[HH']$ ثمّ احسب مساحة المثلث $AHH'$

## تمرين 4 علوم – 2016 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين $A(5;-1;-2)$ و $B(3;12;-7)$

$(\Delta)$ هو المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \\ z=4k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$

**1** (أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)'$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه له

(ب) بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta)'$ متعامدان، ثمّ تحقق أنّ النقطة $C(1;1;0)$ نقطة تقاطعهما

**2** $(\mathcal{P})$ المستوي المعيّن بالمستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta)'$

(أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي للمستوي $(\mathcal{P})$، ثمّ جد معادلة ديكارتية له

(ب) بيّن أنّ النقطة $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(\mathcal{P})$

**3** $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان و $(\mathcal{P}')$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرفة بـ : $\begin{cases} x=3 \quad - \quad \beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$

(أ) أثبت أنّ المجموعة $(\mathcal{P}')$ هي مستو ثمّ تحقق أنّ $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية له

(ب) عيّن إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع المستوي $(\mathcal{P}')$ مع المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta)'$ على الترتيب

(ج) احسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$

## تمرين 5 علوم – 2015 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$،

نعتبر النقط $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$

**1** تحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا و أنّ $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له.

**2** بيّن أنّ المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع، ثم تحقق أنّ مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة

**3** عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ العمودي على المستوي $(ABC)$ و الذي يشمل النقطة $D$

**4** النقطة $E$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

(أ) عيّن إحداثيات النقطة $E$ ثمّ احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(ABC)$

(ب) عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان $(ABC)$ في النقطة $E$ و نصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$

**5** احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

**تمرين 6**　　　**علوم – 2015 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$،

نعتبر النقط $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ و $D(1;0;-2)$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية :

**1** النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية

**2** $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**3** النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

**4** المستقيمان $(AB)$ و $(CD)$ من نفس المستوي

**5** $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=2t-1\\ y=t-1\\ z=-t-1\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم $(CD)$

**6** يوجد عددان حقيقيان $\alpha$ و $\beta$ حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

**تمرين 7**　　　**علوم – 2014 – الموضوع الأول (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$

**1** **(أ)** تحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

**(ب)** بيّن أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$

**(ج)** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**2** لتكن النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$

**(أ)** احسب إحداثيات $G$

**(ب)** لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MD}\|$

بيّن أنّ $(\Gamma)$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$

**(ج)** أثبت أنّ معادلة $(\Gamma)$ هي : $6x-4y+2z+3=0$

**3** بيّن أنّ المستويين $(ABC)$ و $(\Gamma)$ يتقاطعان وفق مستقيم يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له

**تمرين 8**　　　**علوم – 2014 – الموضوع الثاني (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$

**1** **(أ)** برهن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ في غير استقامية

**(ب)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(ABC)$

**(ج)** تحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**2** نعتبر المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ المعرفين بمعادلتيهما كما يلي :

$$(P):\ x-y-2z+5=0 \quad \text{و} \quad (Q):\ 3x+2y-z+10=0$$

برهن أنّ $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ يتقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$ ذي التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t+1 \end{cases}$

**3** عيّن تقاطع المستويات $(ABC)$ ، $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$

**4** لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $\mathrm{d}(M,(\mathcal{P}))$ المسافة بين $M$ و المستوي $(\mathcal{P})$ و $\mathrm{d}(M,(\mathcal{Q}))$ المسافة بين $M$ و المستوي $(\mathcal{Q})$، عيّن المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ بحيث :

$$\sqrt{6}\,\mathrm{d}(M,(\mathcal{P}))=\sqrt{14}\,\mathrm{d}(M,(\mathcal{Q}))$$

## تمرين 9 — علوم – 2013 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ و $D(2;0;-1)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ ذا المعادلة $2y+z+1=0$

ليكن $(\Delta)$ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث $\beta$ وسيط حقيقي

**1** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(BC)$، ثمّ تحقق أنّ المستقيم $(BC)$ محتوى في المستوي $(\mathcal{P})$

**2** بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(BC)$ ليسا من نفس المستوي

**3** **(أ)** احسب المسافة بين النقطة $A$ و المستوي $(\mathcal{P})$

**(ب)** بيّن أنّ $D$ نقطة من $(\mathcal{P})$ ، و أنّ المثلث $BCD$ قائم

**4** بيّن أنّ $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه

## تمرين 10 — علوم – 2013 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. و لتكن $I$ منتصف القطعة $[AB]$

**1** **(أ)** احسب إحداثيات النقطة $I$

**(ب)** بيّن أنّ : $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ $(\mathcal{P})$ المستوي المحوري لـ $[AB]$

**2** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $C$ و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له

**3** (أ) جد إحاثيات $E$ نقطة تقاطع المستوي $(\mathcal{P})$ و المستقيم $(\Delta)$

(ب) بيّن أنّ $(\Delta)$ و $(AB)$ من نفس المستوي، ثمّ استنتج أنّ المثلث $IEC$ قائم

**4** (أ) بيّن أنّ المستقيم $(ID)$ عمودي على كل من المستقيم $(AB)$ و المستقيم $(IE)$

(ب) احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$

## تمرين 11 علوم – 2012 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ ذا المعادلة : $14x+16y+13z-47=0$

و النقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-1;3;1)$

**1** (أ) تحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية

(ب) بيّن أنّ المستوي $(ABC)$ هو $(\mathcal{P})$

**2** جد تمثيلا وسيطيا للمتقيم $(AB)$

**3** (أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري $(\mathcal{Q})$ للقطعة $[AB]$

(ب) تحقق أنّ النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{Q})$

(ج) احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(AB)$

## تمرين 12 علوم – 2012 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$

**1** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

**2** بيّن أنّ $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**3** $D$ و $H$ نقطتان من الفضاء حيث : $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

(أ) تحقق أنّ النقطة $D$ لا تنتمي إلى المستوي $(ABC)$

(ب) بيّن أنّ النقطة $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

(ج) استنتج أنّ المستويين $(ADH)$ و $(ABC)$ متعامدان، ثمّ جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما

## تمرين 13 علوم – 2011 – الموضوع الأول (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له، و ليكن $(\mathcal{Q})$ المستوي ذا المعادلة $x+2y-7=0$

**1** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$

**2** **(أ)** تحقق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$

**(ب)** بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له

**3** لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

**(أ)** احسب المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $(\mathcal{P})$ ثمّ المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $(\mathcal{Q})$

**(ب)** أثبت أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ متعامدان

**(ج)** استنتج المسافة بين النقطة $C$ و المستقيم $(\Delta)$

## تمرين 14 　　علوم – 2011 – الموضوع الثاني (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$

**1** **(أ)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له

**(ب)** تحقق أنّ النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$

**(ج)** بيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان

**(د)** استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$

**2** نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث $t$ عدد حقيقي، و لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(t)=AM$

**(أ)** اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة $t$

**(ب)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $t$ : $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

**(ج)** استنتج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة $AM$ أصغر ما يمكن

**(د)** قارن بين القيمة الصغرى للدالة $h$ ، و المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$

## تمرين 15 　　علوم – 2010 – الموضوع الأول (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$

**1** **(أ)** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية

**(ب)** بيّن أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي : $x+y-z-2=0$

**2** نعتبر المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ الذين معادلتيهما على الترتيب

$$(\mathcal{P}):\quad x+2y-3z+1=0 \qquad \text{و} \qquad (\mathcal{Q}):\quad 2x+y-z-1=0$$

و المستقيم $(\mathcal{D})$ لذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له

**(أ)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\mathcal{D})$

**(ب)** تحقق أنّ تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ هو المستقيم $(\mathcal{D})$

**3** عيّن تقاطع المستويات الثلاثة $(ABC)$ ، $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$

## تمرين 16

**علوم – 2009 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ و $C(2;1.3)$

**1** $(\mathcal{P})$ مستو معادلة له من الشكل $x-z+1=0$

**(أ)** بيّن أنّ المستوي $(\mathcal{P})$ هو المستوي $(ABC)$

**(ب)** ما طبيعة المثلث $ABC$ ؟

**2** **(أ)** تحقق أنّ النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى $(ABC)$

**(ب)** ما طبيعة $ABCD$ ؟

**3** **(أ)** احسب المسافة بين $D$ و المستوي $(ABC)$

**(ب)** احسب حجم $ABCD$

## تمرين 17

**علوم – 2009 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ و $D(1;-1;-2)$

و ليكن $(\Pi)$ المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

**المطلوب :** أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحلات التالية :

**1** النقط $A$ ، $B$ و $C$ في استقامية

**2** $(ABD)$ مستوي معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$

**3** المستقيم $(CD)$ عمودي على المستوي $(\Pi)$

**4** المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(\Pi)$ هو النقطة $H(1;1;-1)$

## تمرين 18

**علوم – 2008 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ الذي معادلته $x+2y-z+7=0$ و النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ و $C(-1;-2;2)$

**1** تحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية، ثمّ بيّن أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي $y+2z-2=0$

**2** **(أ)** تحقق أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(ABC)$ متعامدان، ثمّ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ مستقيم تقاطع $(\mathcal{P})$ و $(ABC)$

**(ب)** احسب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$

**3** لتكن $G$ مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$ عيّن $\alpha$ حتى تنتمي النقطة $G$ إلى المستقيم $(\Delta)$

**تمرين 19** **علوم – 2008 – الموضوع الثاني (3 نقاط)**

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1.0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$ و المستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته : $x-3z-4=0$

**1** المستوي $(\mathcal{P})$ هو :

ج 1 $(BCD)$ ج 2 $(ABC)$ ج 3 $(ABD)$

**2** شعاع ناظمي للمستوي $(\mathcal{P})$ هو :

ج 1 $\vec{n_1}(1;2;1)$ ج 2 $\vec{n_2}(-2;0;6)$ ج 3 $\vec{n_3}(2;0;-1)$

**3** المسافة بين النقطة $D$ و المستوى $(\mathcal{P})$ هي :

ج 1 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ج 2 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ج 3 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

# شعبة رياضيات

**تمرين 20** **رياضيات – 2017 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(-1;1;-2)$ و $B(1;-3;-4)$ و المستقيم $(\Delta)$ ذا التمثيل الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=t-2 \\ y=-t+2 \\ z=2t-4 \end{cases}$

و ليكن $(\Delta')$ المستقيم الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(-1;2;1)$ شعاع توجيه له

**1** بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ يتقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها

**2** ليكن $(\mathcal{P})$ المستوي المعيّن بالمستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له

**3** نسمّي $(\mathcal{S})$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $AM^2+BM^2=20$

بيّن أنّ $(\mathcal{S})$ سطح كرة مركزها منتصف القطعة $[AB]$ و نصف قطرها 2

**4** حدّد الوضع النسبي للمستوي $(\mathcal{P})$ و سطح الكرة $(\mathcal{S})$

**تمرين 21** **رياضيات – 2017 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$(\mathcal{P})$ مستو تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=-t-2\lambda+2 \\ y=3t+4\lambda-3 \\ z=3t+4\lambda-1 \end{cases}$ حيث $t$ و $\lambda$ عددان حقيقيان

**1** عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$

**2** ليكن $\alpha$ عددا حقيقيا من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ، و لتكن $(E_\alpha)$ مجموعة النقطة من الفضاء حيث :

$$x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha-z-\frac{3}{4}$$

**(ا)** بيّن أنّ : من أجل كل $\alpha$ من المجال السابق ، $(E_\alpha)$ هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها $\omega_\alpha$ بدلالة و نصف قطرها $R$

**(ب)** ادرس حسب قيم العدد الحقيقي $\alpha$ الوضع النسبي للمستوي $(\mathcal{P})$ و سطح الكرة $(E_\alpha)$

**3** في الحالة التي يكون فيها المستوي $(\mathcal{P})$ مماسا لسطح الكرة $(E_\alpha)$

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\mathcal{D})$ الذي يشمل النقطة $\omega_\alpha$ و العمودي على المستوي $(\mathcal{P})$

و استنتج إحداثيات $I$ نقطة تماس $(E_\alpha)$ مع المستوي $(\mathcal{P})$

**تمرين 22** **رياضيات – 2016 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$، $B(2;-1;1)$، $C(-1;0;1)$، $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$، $E(0;1;1)$ و $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ المعرّف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha-\beta \end{cases}$، $\alpha$ و $\beta$ وسيطان حقيقيان.

**1** (أ) بيّن أنّ $A$، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

(ب) تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;3;5)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

**2** (أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ ثمّ بيّن أنّ المستويين $(ABC)$ و $(\mathcal{P})$ متقاطعان

(ب) نسمي $(\Delta)$ مستقيم تقاطع المستويين $(ABC)$ و $(\mathcal{P})$

تحقق أنّ النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ و أنّ $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$

(ج) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$

(د) بيّن أنّ النقطة $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(\Delta)$ ثمّ استنتج المسافة بين $A$ و $(\Delta)$

**3** $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-3);(C,2)\}$

نسمّي $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{GM}=11$

(أ) عيّن إحداثيات النقطة $G$

(ب) اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة $(\Gamma)$ ثمّ بيّن أنّها سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

(ج) حدّد الوضعية النسبية للمستوي $(ABC)$ و المجموعة $(\Gamma)$

**تمرين 23** **رياضيات – 2016 – الموضوع الثاني (5 نقاط)**

**1** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ حيث $A(1;0;3)$، $B(1;2;4)$، $C(0;0;2)$ و $D(3;4;1)$

(أ) عيّن العددين $\alpha$ و $\beta$ حتى يكون الشعاع $\vec{n}(2;\alpha;-\beta)$ ناظميا للمستوي $(ABC)$

(ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**2** $z=2-x$ و $y=2z-2x-4$ معادلتان ديكارتيتان للمستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ على الترتيب

(أ) بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ متعامدان

(ب) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$

(ج) احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(\Delta)$

**3** $(\mathcal{S})$ سطح الكرة التي مركزها $D$ و مماس للمستوي $(\mathcal{Q})$

(أ) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(\mathcal{S})$

**(ب)** جد الطبيعة و العناصر المميّزة لتقاطع $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{S})$

**4** $\lambda$ عدد حقيقي، $G_\lambda$ نقطة من الفضاء حيث : $2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+\mathrm{e}^{\lambda}\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$ (العدد e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبري)

**(ا)** عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $(1+\mathrm{e})\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\mathrm{e}\overrightarrow{MC}\right\|$

**(ب)** $H$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1)\}$. اكتب $\overrightarrow{GG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$

**(ج)** عيّن مجموعة النقط $G_\lambda$ لمّا يتغيّر $\lambda$ في المجموعة $\mathbb{R}$

**(د)** جد قيمة $\lambda$ التي تكون من أجلها $G_\lambda$ منتصف القطعة $[CH]$

## تمرين 24 — رياضيات – 2015 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;5;4)$ ، $B(10;4;3)$ ، $C(4;3;5)$ و $D(0;4;5)$

**1** **(ا)** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية

**(ب)** بيّن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ من نفس المستوي

**(ج)** استنتج أنّ النقطة $D$ هي مرجح النقط $A$ ، $B$ و $C$ مرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها

**(د)** عيّن إحداثيات النقطة $E$ نظيرة النقطة $A$ بالنسبة إلى النقطة $D$

**(هـ)** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ المحوري للقطعة $[AE]$

**2** عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\right\|$

**3** **(ا)** تحقق أنّ النقطة $F(1;8;10)$ تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{P})$

**(ب)** المستقيم $(FD)$ يقطع $(\Gamma)$ في النقطتين $G$ و $H$

حدّد طبيعة الرباعي $AGEH$ ، ثمّ احسب مساحته

**4** $(\Delta)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $D$ و يعامد المستوي $(AEH)$

**(ا)** بيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي للمستوي $(AEH)$

**(ب)** تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $t$، النقطة $N(3t;4-2t;5+t)$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$

**(ج)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $t$، حجم المجسم $NAGEH$ هو $v(t)$ حيث $v(t)=2|t|\sqrt{14}$ uv ( uv وحدة الحجوم)

**(د)** عيّن إحداثيات كل من النقطتين $N_1$ و $N_2$ من $(\Delta)$ اللّتين يكون من أجليهما $v(t)=2\sqrt{3}$ uv

## تمرين 25 — رياضيات – 2015 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2;0;0)$ و $B(-1;-5;-1)$

$(\Delta_1)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}(-1;2;-1)$ شعاع توجيه له

$(\Delta_2)$ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$(d)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{v}(2;5;3)$ شعاع توجيه له

**1** بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ يتقاطعان في النقطة $C$ يُطلب تعيين إحداثياتها

**2** بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta_1)$ و $(d)$ ليسا من نفس المستوي

**3** (أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$

(ب) استنتج أنّ $4x + 3y + 2z - 8 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$

(ج) تحقق من أنّ النقطة $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(\mathcal{P})$

**4** (أ) بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة $I$ من المستقيم $(d)$ و توجد نقطة وحيدة $D$ من المستقيم $(\Delta_2)$ حيث تكون النقط $A$ ، $I$ و $D$ في استقامية، يطلب تعيين إحداثيات النقطتين $I$ و $D$

(ب) بيّن أنّ النقطة $I$ هي منتصف القطعة $[AD]$

**5** النقطة $K$ مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1),(I;2)\}$ و النقطة $G$ المسقط العمودي للنقطة $K$ على المستوي $(\mathcal{P})$

(أ) بيّن أنّ النقطة $G$ هي مرجح النقط $A$ ، $C$ و $D$ المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها

(ب) استنتج إحداثيات النقطة $G$

## تمرين 26 — رياضيات – 2014 – الموضوع الأوّل (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$ و $D(1;1;-2)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ المعرف بالمعادلة الديكارتية $2x - y + 2z + 1 = 0$

**المطلوب** أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

**1** انقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

**2** المستقيم $(AC)$ محتوى في المستوي $(\mathcal{P})$

**3** $x - 2y - z - 1 = 0$ هي معادلة للمستوي $(ACD)$

**4** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم $(AC)$

**5** المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(\mathcal{P})$ تساوي $\frac{3}{2}$

**6** النقطة $E(-2;-1;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على $(\mathcal{P})$

**7** سطح الكرة ذات المركز $D$ و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$

**تمرين 27** **رياضيات – 2014 – الموضوع الثاني (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. $(\Delta)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$ و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له. $(\Delta')$ المستقيم المعرف بجملة المعادلتين : $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

**1** جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$

**2** بيّن أنّ $(\Delta)$ و $(\Delta')$ ليسا من نفس المستوي

**3** $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل $(\Delta')$ و يوازي $(\Delta)$. بيّن أنّ معادلة للمستوي $(\mathcal{P})$ هي : $2x+y+2z-3=0$

**4** $M(1+t;1+2t;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم $(\Delta)$، حيث $t\in\mathbb{R}$. احسب المسافة $\mathrm{d}$ المسافة بين $M$ و المستوي $(\mathcal{P})$

**5** **(أ)** عيّن إحداثيات النقطة $A'$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta'')$ الذي يشمل $A'$ و يوازي $(\Delta)$

**(ب)** بيّن أنّ $(\Delta')$ و $(\Delta'')$ يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$

**6** $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(t)=BM^2$

**(أ)** بيّن أنّ : $f(t)=9t^2-24t+20$

**(ب)** بيّن أنّ $f$ تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يطلب تعيين $t_0$ و $f(t_0)$

**(ج)** تحقق أنّ $\mathrm{d}=\sqrt{f(t_0)}$

**تمرين 28** **رياضيات – 2013 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ المعرّف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ مع $\alpha$ و $\beta$ وسيطان حقيقيان

**1** **(أ)** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

**(ب)** تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له

**2** **(أ)** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ بيّن أنّ المستويين $(ABC)$ و $(\mathcal{P})$ متعامدان

**(ب)** بيّن أنّ تقاطع $(ABC)$ و $(\mathcal{P})$ هو المستقيم $(\Delta)$ ذو التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t \\ z=-7+5t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

**(ج)** احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(ABC)$ ، و المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(\Delta)$

**3** $(\mathcal{Q})$ المستوي الذي يشمل النقطة $D$ و عمودي على كل من المستويين $(ABC)$ و $(\mathcal{P})$

**(أ)** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{Q})$

**(ب)** بيّن أنّ المستويات الثلاثة $(ABC)$ ، $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ تتقاطع في نقطة واحدة $H$ ، ثمّ عيّن إحداثيات $H$

**(ج)** احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(\Delta)$.

**تمرين 29** **رياضيات – 2013 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(1;1;1)$ و المستقيم $(\Delta)$ المعرف باتمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=-2 \\ z=-1-\alpha \end{cases}$ حيث $(\alpha\in\mathbb{R})$

**1** **(أ)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$

**(ب)** بيّن أنّ المستقيمين $(AB)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي

**2** $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل $(AB)$ و يوازي $(\Delta)$

**(أ)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$

**(ب)** أثبت أنّ $x-y+z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$

**3** لتكن $N$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$ و $M$ نقطة من الفضاء إحداثياتها $(1+2\beta;1+\beta;1-\beta)$ مع $(\beta\in\mathbb{R})$

**(أ)** بيّن أنّ النقطة $M$ تنتمي إلى المستقيم $(AB)$

**(ب)** جد إحداثيات النقطتين $M$ و $N$ حتى تكون $M$ المسقط العمودي للنقطة $N$ على المستوي $(\mathcal{P})$

**(ج)** تحقق أنّ المسافة بين $N$ و $(\mathcal{P})$ هي $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$، ثمّ احسب مساحة المثلث $ABN$

**تمرين 30** **رياضيات – 2012 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;4;0)$ و $C(2;2;2)$

**1** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية و أنّ الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

**2** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ و $C$

**3** **(أ)** بيّن أنّ $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P}')$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفظاء حيث $AM=BM$

**(ب)** بيّن أنّ $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P}'')$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفظاء حيث $AM=CM$

**(ج)** بيّن أنّ $(\mathcal{P}')$ و $(\mathcal{P}'')$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له

**4** احسب إحداثيات النقطة $\omega$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$

**تمرين 31** **رياضيات – 2012 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;1.1)$ ، $B(1;-1;0)$ و $C(2;0;1)$

1. بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا $(\mathcal{P}_1)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له
2. $(\mathcal{P}_2)$ المستوى الذي $x-2y+2z+6=0$ معادلة له.

   بيّن أنّ $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له
3. بيّن أنّ النقطة $O$ هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$
4. **(ا)** عيّن $(\mathcal{S})$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\sqrt{3}\right\|$

   **(ب)** احسب إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع $(\mathcal{S})$ و $(\Delta)$

   **(ج)** ما هي طبيعة المثلث $ODE$ ؟ ثمّ استنتج المسافة بين $O$ و $(\Delta)$

**تمرين 32** **رياضيات – 2011 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$

   **(ا)** أثبت أنّ $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

   **(ب)** بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثمّ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$
2. نعتبر المستويين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ حيث : $(\mathcal{P}_1):\ 3x+4y-2z+1=0$ و $(\mathcal{P}_2):\ 2x-2y-z-1=0$

   **(ا)** بيّن أنّ $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ متعامدان

   **(ب)** عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$

   **(ج)** تحقق أنّ النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى $(\Delta)$

   **(د)** احسب المسافتين $\mathrm{d}(O;(\mathcal{P}_1))$ و $\mathrm{d}(O;(\mathcal{P}_2))$ و استنتج المسافة $\mathrm{d}(O;(\Delta))$

**تمرين 33** **رياضيات – 2011 – الموضوع الثاني (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $D\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

$(\mathcal{D})$ المستقيم الذي يشمل $A$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و $(\Delta)$ المستقيم الذي يشمل النقطة $C$ و شعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين $(\mathcal{D})$ و $(\Delta)$ ثمّ ادرس الوضع النسبي لهما
2. بيّن أنّ : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقطة $G$ ؟
3. عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي $(ABC)$ ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له

**4** احسب المسافة بين النقطة $O$ و المستوي $(ABC)$

**5** $H$ المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستقيم $(\mathcal{D})$

(أ) جد إحداثيات النقطة $H$

(ب) استنتج المسافة بين النقطة $B$ و المستقيم $(\mathcal{D})$

**تمرين 34** **رياضيات – 2010 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2;0;0)$ ، $B(0;1;0)$ و $C(0;0;2)$

**1** بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية

**2** جد معادلة للمستوي $(ABC)$

**3** جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(BC)$

**4** $(\mathcal{P})$ المستوي الذي معادلته : $2x+2y+z-2=0$

(أ) بيّ أنّ $(\mathcal{P})$ و $(ABC)$ متقاطعان

(ب) بيّن أنّ $(\mathcal{P})$ يشمل $B$ و $C$ ، ماذا تستنتج ؟

**5** عيّن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

**تمرين 35** **رياضيات – 2010 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-1;2;1)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(0;-1;2)$ ، و لتكن $(\mathcal{P})$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء بحث : $AM=BM$

**1** بيّن أنّ $(\mathcal{P})$ هو المستوي الذي معادلته : $3x-y+2z-4=0$

**2** عيّن معادلة للمستوي $(\mathcal{Q})$ الذي يشمل $A$ و يوازي $(\mathcal{P})$

**3** (أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\mathcal{D})$ الذي يشمل $C$ و يعامد $(\mathcal{P})$

(ب) عيّن إحداثيات $E$ نقطة تقاطع $(\mathcal{Q})$ و $(\mathcal{D})$

(ج) احسب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\mathcal{D})$

**4** عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\Pi)$ الذي يحوي المستقيم $(AC)$ و يعامد المستوي $(\mathcal{P})$ ، ثم استنتج معادلة له

**تمرين 36** **رياضيات – 2009 – الموضوع الأول (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2;1;2)$ و $B(0;2;-1)$ و المستقيم $(\mathcal{D})$ ذو التمثيل الوسيطي : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$

**1** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$

أثبت أنّ $(\mathcal{D})$ و $(AB)$ لا ينتميان إلى نفس المستوي

**2** نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيم $(AB)$ و يوازي المستقيم $(\mathcal{D})$

**(أ)** بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ عمودي على المستوي $(\mathcal{P})$

**(ب)** اكتب معادلة للمستوي $(\mathcal{P})$

**(ج)** بيّن أنّ المسافة بين نقطة $M$ من $(\mathcal{D})$ و المستوي $(\mathcal{P})$ مستقلة عن موضع $M$

**(د)** عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي $(\mathcal{P})$ مع المستوي $(O;\vec{j},\vec{k})$

## تمرين 37 رياضيات – 2009 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر المستويين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ حيث $x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي $(\mathcal{P}_1)$ و : $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = 1+2\alpha+\beta \\ y = 1+\alpha \\ z = 5+\alpha+\beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي $(\mathcal{P}_2)$

**1** اكتب معادلة للمستوي $(\mathcal{P}_2)$

**2** عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ للمستوي $(\mathcal{P}_1)$ و شعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ للمستوي $(\mathcal{P}_2)$

**3** بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ متعامدان

**4** **(أ)** $A(3;1;1)$ نقطة من الفضاء، عيّن المسافة $d_1$ بين النقطة $A$ و المستوي $(\mathcal{P}_1)$ ثمّ المسافة $d_2$ بين $A$ و $(\mathcal{P}_2)$

**(ب)** استنتج المسافة $d_3$ بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$

**5** **(أ)** عيّن تمثيلا وسيطيا بدلالة $\lambda$ للمستقيم $(\Delta)$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي

**(ب)** $M$ نقطة كيفية من $(\Delta)$ ، احسب $MA^2$ بدلالة $\lambda$ مستنتجا ثانية المسافة بين $A$ و $(\Delta)$

## تمرين 38 رياضيات – 2008 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لتكن النقط $A(0;2;1)$ ، $B(-1;1;-3)$ و $C(1;0;-1)$

**1** اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(\mathcal{S})$ التي مركزها $C$ و تشمل النقطة $A$

**2** ليكن المستقيم $(\mathcal{D})$ المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي.

**(أ)** اكتب معادلة للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل النقطة $C$ و يعامد المستقيم $(\mathcal{D})$

**(ب)** احسب المسافة بين النقطة $C$ و المستقيم $(\mathcal{D})$

**(ج)** ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم $(\mathcal{D})$ و سطح الكرة $(\mathcal{S})$ ؟

**تمرين 39** **رياضيات – 2008 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر المستقيمين و المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

على الترتيب.

**1** بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ ليسا من نفس المستوي

**2** $M$ نقطة كيفية من $(\Delta)$ و $N$ نقطة كيفية من $(\Delta')$

**(ا)** عيّن إحداثيات النقطتين $M$ و $N$ بحيث يكون المستقيم $(MN)$ عموديا على كل من $(\Delta)$ و $(\Delta')$

**(ب)** احسب الطول $MN$

**3** عيّن معادلة للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيم $(\Delta)$ و يوازي المستقيم $(\Delta')$

**4** احسب المسافة بين نقطة كيفية من $(\Delta')$ و المستوي $(\mathcal{P})$ . ماذا تلاحظ ؟

# شعبة تقني رياضي

**تمرين 40** — **تقني رياضي – 2017 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نتبر النقط $A(2;2;0)$ ، $B(0;-2;2)$ و $C(1;1;3)$

**1** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل النقطة $A$ و يعامد المستقيم $(BC)$

**2** نعتبر $(\mathcal{P}')$ المستوي المحوري للقطعة $[AB]$، تحقق أنّ معادل $(\mathcal{P}')$ هي : $x+2y-z=0$

**3** بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ ، يطلب إيجاد تمثيل وسيطي له

**4** بيّن أنّ النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;1),(C;-12)\}$ هي نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(ABC)$

ثمّ عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-12\overrightarrow{MC}\right\|=10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$

**تمرين 41** — **تقني رياضي – 2017 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1.0)$ ، $B(-1;2;-3)$ ، $C(0;5;2)$ و $D(4;7;0)$

**1** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستو

**2** (ا) أثبت أنّ المستقيم $(CD)$ عمودي على كل من المستقيمين $(AB)$ و $(AC)$

(ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ ، ثمّ احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستوى $(ABC)$

**3** (ا) حدّد طبيعة المثلث $ABC$

(ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

**تمرين 42** — **تقني رياضي – 2016 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. لتكن النقط $A(1;1;4)$ ، $B(0;3;1)$ و $\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3};5\right)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ الذي $x-2y+z-3=0$ معادلة له و المستقيم $(\Delta)$ الذي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=4-3t \end{cases}$ تمثيلا وسيطيا له

في كل سؤال توجد إجابة واحدة صحيحة من بين الاقتراحات الثلاثة، حدّدها مع التعليل

| | | الإجابة (أ) | الإجابة (ب) | الإجابة (جـ) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | المستوى $(\mathcal{P})$ يحوي المستقيم | $(\Delta)$ | $(AB)$ | $(AC)$ |
| 2 | المستويان $(\mathcal{P})$ و $(ABC)$ | متوازيان تماما | متقاطعان | متطابقان |
| 3 | المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستقيم $(\Delta)$ هي النقطة | $A$ | $B$ | $C$ |
| 4 | المستقيمان $(\Delta)$ و $(AC)$ | متقاطعان | متوازيان | ليسا من نفس المستوى |
| 5 | مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $BM^2 - 9CM^2 = 0$ هي | مستو | سطح كرة | مجموعة خالية |

**تمرين 43** **تقني رياضي – 2016 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ حيث : $A(3;-2;2)$، $B(6;1;5)$، $C(6;-2;-1)$ و $D(0;1;1)$

**1** بيّن أنّ $ABC$ مثلث قائم في $A$

**2** اكتب معادلة للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل $A$ و العمودي على $(AB)$

**3** ليكن $(\mathcal{P}')$ المستوي حيث $x-z-1=0$ معادلة له

**(أ)** هل المستويان $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ متعامدان ؟ برّر إجابتك

**(ب)** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل $A$ و $\vec{u}(1;-2;1)$ شعاع توجيه له هو تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$

**4** لتكن النقطة $H\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ من الفضاء.

**(أ)** بيّن أنّ $H$ هي المسقط العمودي لـ $D$ على $(\Delta)$

**(ب)** احسب المسافة بين $D$ و $(\Delta)$

**5** **(أ)** بيّن أنّ النقطة $E(0;4;-1)$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$

**(ب)** احسب حجم رباعي الوجوه $ABCE$

**تمرين 44** **تقني رياضي – 2015 – الموضوع الأول (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;2)$ ، $B(2;0;2)$ ، $C(-2;3;7)$ و المستوى $(\mathcal{P})$ المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = 2+\beta \\ y = -1-3\alpha-\beta \\ z = -\alpha \end{cases}$ $\alpha$ و $\beta$ وسيطان حقيقيان

**1** (أ) بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

(ب) تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

**2** (أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$، ثمّ بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(ABC)$ متعامدان

(ب) بيّن أنّ تقاطع $(\mathcal{P})$ و $(ABC)$ هو المستقيم $(\Delta)$ ذو التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = 5+4t \\ y = -4-7t \\ y = -t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

**3** (أ) عيّن إحداثيات النقطة $H$ مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$

(ب) احسب المسافة بين النقطة $H$ و المستقيم $(\Delta)$

**4** لتكن $(\mathcal{P}')$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء بحيث $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right).\vec{u}=0$ ( $\vec{u}$ هو شعاع توجيه المستقيم $(\Delta)$)

(أ) بيّن أنّ المجموعة $(\mathcal{P}')$ هي مستو يطلب تعيين عناصره المميزة، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له.

(ب) بيّن أنّ المستويات الثلاثة $(\mathcal{P})$ ، $(ABC)$ و $(\mathcal{P}')$ تتقاطع في نقطة واحدة $E$، ثمّ عيّن إحداثيات $E$

(ج) احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة $H$ و المستقيم $(\Delta)$

**تمرين 45** **تقني رياضي – 2015 – الموضوع الثاني (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(2;3;1)$ ، $B(1;2;-2)$ و المستقيم $(D)$ الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1-t \\ y = 3+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

**1** (أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له.

(ب) عيّن إحداثيات النقطة $C$ نقطة تقاطع المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$

**2** $(\mathcal{P})$ المستوي المعيّن بالمستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$

بيّن أنّ $\vec{n}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له

**3** (أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\Omega)$ الذي يشمل النقطة $B$ و يعامد المستقيم $(\Delta)$

(ب) عيّن إحداثيات النقطة $E$ المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستقيم $(\Delta)$

(ج) احسب المسافة بين النقطة $B$ و المستقيم $(\Delta)$

(د) احسب مساحة المثلث $BEC$

**تمرين 46** — **تقني رياضي – 2014 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطين التاليين :

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\\ z=1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})\qquad \text{و}\qquad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\ y=-1-2t'\\ z=4+2t'\end{cases}\quad(t'\in\mathbb{R})$$

**1** **(أ)** عيّن إحداثيات النقطة $B$ تقاطع المستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$

**(ب)** عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$ المعيّن بالمستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$

**2** **(أ)** أثبت أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{P})$

**(ب)** بيّن أنّ النقطة $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(\mathcal{P})$

**3** **(أ)** عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{Q})$ الذي يشمل $A$ و $\vec{n}(5;1;-7)$ ناظمي له

**(ب)** عيّن إحداثيات $C$ و $D$ نقطتي تقاطع $(\mathcal{Q})$ مع كل من $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ على الترتيب

**4** **(أ)** عيّن طبيعة المثلث $BCD$، ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

**(ب)** استنتج مساحة المثلث $ACD$

**تمرين 47** — **تقني رياضي – 2014 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

$A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من الفضاء حيث : $A(0;-1;1)$ ، $B(1;3;2)$ و $C(-1;3;4)$

**1** **(أ)** احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثمّ استنتج القيمة المدوّرة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

**(ب)** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

**2** **(أ)** بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;2)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$

**(ب)** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**3** ليكن $(\mathcal{S})$ سطح الكرة الذي معادلته : $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

نسمي $\Omega$ و $R$ مركز و نصف قطر $(\mathcal{S})$، احسب $R$ ثمّ عيّن إحداثيات $\Omega$

**4** اكتب معادلة ديكارتية لكل من المستويين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ مماسي سطح الكرة $(\mathcal{S})$ و الموازيين للمستوي $(ABC)$

**تمرين 48** — **تقني رياضي – 2013 – الموضوع الأول (4 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(3;-2;-1)$ ، $B(5;-3;2)$ ، $C(2;3;2)$ و $D(1;-5;-2)$

**1** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا، نرمز له $(\mathcal{P})$

**2** بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$

**3** **(أ)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $D$ و يعامد $(\mathcal{P})$

**(ب)** عيّن إحداثيات النقطة $E$ ، المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(\mathcal{P})$

**4** $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستقيم $(AB)$ ، و $\lambda$ العدد الحقيقي حيث : $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB}$

**(أ)** بيّن أنّ : $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$

**(ب)** استنتج العدد الحقيقي $\lambda$ و إحداثيات النقطة $H$ ، ثمّ المسافة بين النقطة $H$ و المستقيم $(AB)$

## تمرين 49 — تقني رياضي – 2013 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(2;-5;4)$ و $B(3;-4;6)$ و المستقيم $(\Delta)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases}$

**1** **(أ)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\mathcal{D})$ المار بالنقطتين $A$ و $B$

**(ب)** ادرس الوضع النسبي للمستقيمين $(\Delta)$ و $(\mathcal{D})$

**2** $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل $(\mathcal{D})$ و يُوازي $(\Delta)$

برهن أنّ $\vec{n}(3;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$

**3** $M$ نقطة كيفية من $(\Delta)$ و $N$ نقطة كيفية من $(\mathcal{D})$

**(أ)** عيّن إحداثيات النقطتين $M$ و $N$ بحيث يكون المستقيم $(MN)$ عموديا على كل من $(\Delta)$ و $(\mathcal{D})$

**(ب)** احسب المسافة بين نقطة كيفية من $(\Delta)$ و المستوي $(\mathcal{P})$

## تمرين 50 — تقني رياضي – 2012 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

$(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل النقطة $A(2;-5;2)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له. $(\mathcal{Q})$ المستوي الذي $x+2y-2=0$ معادلة له

**1** عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$

**2** بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ متعامدان

**3** عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ ، تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$

**4** **(أ)** احسب المسافة $d_1$ بين النقطة $K(3;3;3)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ و $d_2$ المسافة بين النقطة $K$ و المستوي $(\mathcal{Q})$

**(ب)** استنتج المسافة $d$ بين النقطة $K$ و المستقيم $(\Delta)$

**5** احسب المسافة d بطريقة ثانية

**تمرين 51** **تقني رياضي – 2012 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. $(\mathcal{P})$ المستوي الذي $-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و

$(\mathcal{D})$ المستقيم الذي : $\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k \\ z=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$

**1** تحقق أنّ المستقيم $(\mathcal{D})$ محتوى في المستوي $(\mathcal{P})$

**2** **(أ)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له

**(ب)** عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين $(\mathcal{D})$ و $(\Delta)$

**3** بيّن أنّ $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{Q})$ الذي يحوي المستقيمين $(\mathcal{D})$ و $(\Delta)$

**4** $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

**(أ)** احسب المسافة بين النقطة $M$ و كل من $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$

**(ب)** أثبت أنّ مجموعة النقط من الفضاء متساوية المسافة عن كل من $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ هي اتحاد مستويين متعامدين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما

**5** عيّن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية : $\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$

**تمرين 52** **تقني رياضي – 2012 – الموضوع الأول (5 نقاط)**

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

**1** المعادلة $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

**2** في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421}+\overline{1562}=\overline{5413}$

**3** باقي القسمة الإقليدية للعدد $1+3+3^2+\cdots+3^{2011}$ على 7 هو 6

**4** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

**(أ)** المستوي $(\mathcal{P})$ الذي معادلته $2x+y-z+1=0$ و المستقيم $(d)$ الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيهه لا يشتركان في أية نقطة

**(ب)** معادلة المستوي $(\mathcal{Q})$ الذي يشمل مبدأ المعلم $O$ و يوازي المستوي $(\mathcal{P})$ هي : $x-y+z=0$

**تمرين 53** **تقني رياضي – 2011 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ حيث : $\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(0;7;3)$ ، $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ و $C(2;8;-4)$

**1** بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $D$ تعيّن مستويا

**2** بيّن أنّ المستقيم $(CD)$ يعامد المستوي $(ABC)$

**3** $I$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$

(ا) بيّن أنّ المستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(CDI)$

(ب) عيّن معادلة للمستوي $(CDI)$ و اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$

(ج) استنتج إحداثيات النقطة $I$

**4** احسب الأطوال $DI$ ، $CD$ ، $AB$ و استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

( حجم رباعي الوجوه $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع )

**تمرين 54** **تقني رياضي – 2010 – الموضوع الأول (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(3;-1;2)$ و $B(1;2;1)$ و $(\mathcal{P})$ المستوي الذي معادلته $x-2y+3z-7=0$

**1** عيّن إحداثيات النقطة $G$ مرجح النقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب

**2** عيّن طبيعة و عناصر $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=4$

**3** (ا) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $G$ و يعامد المستوي $(\mathcal{P})$

(ب) عيّ إحاثيات $H$ نقطة تقاطع $(\mathcal{P})$ و $(\Delta)$

(ج) احسب المسافة بين $G$ و المستوي $(\mathcal{P})$

**4** نعرف المستوي $(\mathcal{P}')$ بتمثيلة الوسيطو : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t+\lambda \\ z=2-t+2\lambda \end{cases}$ حيث $t$ و $\lambda$ عددان حقيقيان

أثبت أنّ $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ متقاطعان و اكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما

**تمرين 55** **تقني رياضي – 2010 – الموضوع الثاني (5 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(3;-2;2)$ ، $B(0;4;-1)$

**1** اكتب معادلة للمستوي $(\mathcal{P}_1)$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع ناظم له

**2** $(\mathcal{P}_2)$ المستوي الذي يحوي المستقيم $(AB)$ و يعامد المستوي $(\mathcal{P}_1)$

**(ا)** بيّن أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ $(\mathcal{P}_2)$

**(ب)** اكتب معادلة لـ $(\mathcal{P}_2)$

**3** نعتبر النقطتين $C$ و $D$ حيث $C(6;1;5)$ و $D$ معرفة بـ : $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$

**(ا)** بيّن أنّ المثلث $ACD$ قائم في $A$ و احسب مساحته

**(ب)** بيّن أنّ المستقيم $(AB)$ عمودي على المستوي $(ACD)$

**(ج)** احسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$

## تمرين 56 تقني رياضي – 2009 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

$(\Delta)$ مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطي معطى بالجملة التالية : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t+1 \end{cases}$

$(\mathcal{P})$ مستو معرف بالمعادلة $x+3y+z+1=0$

عيّن في كل حالة الاقتراح أو الاقتراحات الصحيحة مع التعليل

| | الاقتراح الأول | الاقتراح الثاني | الاقتراح الثالث |
|---|---|---|---|
| 1 | النقطة $A(1;1;2)$ تنتمي إلى $(\Delta)$ | النقطة $B(-1;0;2)$ تنتمي إلى $(\Delta)$ | النقطة $C\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ تنتمي إلى $(\Delta)$ |
| 2 | $\vec{u}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$ شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ | $\vec{u}(1;3;1)$ شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ | $\vec{u}(3;1;0)$ شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ |
| 3 | $(\Delta)$ هو محتوى في $(\mathcal{P})$ | $(\Delta)$ يقطع $(\mathcal{P})$ | $(\Delta)$ يُوازي $(\mathcal{P})$ |
| 4 | المستوي $(\mathcal{Q}_1)$ ذو المعادلة $x+3y+z-3=0$ يعامد $(\mathcal{P})$ | المستوي $(\mathcal{Q}_2)$ ذو المعادلة $2x-y+\frac{1}{2}z=0$ يعامد $(\mathcal{P})$ | المستوي $(\mathcal{Q}_3)$ ذو المعادلة $x-y+2z+5=0$ يعامد $(\mathcal{P})$ |
| 5 | المسافة بين النقطة $D(1;1;1)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ هي $\frac{6}{\sqrt{11}}$ | المسافة بين النقطة $O(0;0;0)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ هي $\frac{\sqrt{11}}{11}$ | المسافة بين النقطة $E(1;3;0)$ و المستوي $(\mathcal{P})$ هي $\sqrt{11}$ |

## تمرين 57 تقني رياضي – 2009 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. معتبر النقط $A(1;1;2)$ ، $B(-1;0;-2)$ و $C(-1;0;-6)$

**1** بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم $(AB)$ نرمز له بالرمز $(\mathcal{P})$ يطلب تعيين معادلة له

**2** لتكن $(\mathcal{S})$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

برهن أنّ $(\mathcal{S})$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $\Omega$ و نصف قطرها $R$

**3** $G$ نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

**(أ)** عيّن إحداثيات $G$ ثمّ تأكد أنّها تنتمي إلى $(\mathcal{S})$

**(ب)** اكتب معادلة للمستوي $(\mathcal{Q})$ الذي يمس سطح الكرة $(\mathcal{S})$ في النقطة $G$

## تمرين 58 تقني رياضي – 2008 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$. نعتبر النقط $A(1;2;2)$ ، $B(3;2;1)$ و $C(1;3;3)$

**1** برهن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستو يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

**2** نعتبر المستويين $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(\mathcal{P}_1):\quad x-2y+2z-1=0$$

$$(\mathcal{P}_2):\quad x-3y+2z+2=0$$

بيّن أنّ $(\mathcal{P}_1)$ و $(\mathcal{P}_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$

**3** بيّن أنّ النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$

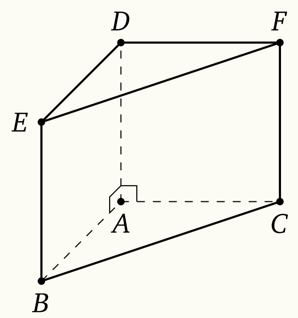
**4** بيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{u}(2;0;-1)$ هو أحد أشعة توجيه المستقيم $(\Delta)$

**5** استنتج أنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ هو الجملة : $(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2k+1\\ y=3\\ z=-k+3\end{cases}$

**6** لتكن $M$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$ ، أوجد قيمة الوسيط $k$ حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{u}$ متعامدين، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$

## تمرين 59 تقني رياضي – 2008 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث $ABC$ القائم في $A$ و المتساوي الساقين وجهاه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما $r$ حيث $r\in\mathbb{R}^*$ (انظر الشكل)



**1** يرمز $I$ إلى منتصف $[AD]$ و $J$ إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$ .

بيّن أنّ $G$ مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;1),(D;2),(E;1),(F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$

**2** ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

- عيّن إحداثيات النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ ، $E$ و $F$
- عيّن مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق :

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2MD^2+ME^2+MF^2=10r^2$$