من امتحانات بكالوريا الجزائر ···

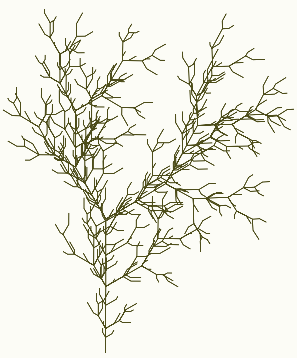
Années : 2008-2017

المتتاليات

الشعب : علوم ، تقني رياضي و رياضيات

كمال حامدي

37



عدد التمارين :

حوليات البكالوريا

علوم – تقني رياضي – رياضيات

المتتاليات

حامدي كمال

آخر تحديث : 24 جانفي 2018

1 شعبة علوم

تمرين 1

علوم – 2017 – الدورة الاستثنائية، الموضوع الأول (4 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1. احسب الحدّين u_1 و v_1
2. (ا) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$
   (ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما
3. نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_n - v_n$
   برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول w_0 ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n
4. بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

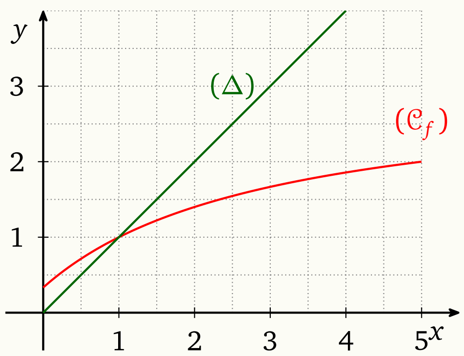
تمرين 2

علوم – 2017 – الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و $(\mathscr{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = f(u_n)$



1. عيّن قيم α حتى تكون (u_n)متتالية ثابتة
   نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$
2. (ا) انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (دون حساب الحدود)
   (ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
   (ا) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول
   (ب) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$

ثمّ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_n+1} + \dfrac{1}{u_{n+11}+1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$

تمرين 3

علوم – 2017 – الموضوع الأوّل (4 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \dfrac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$$

1. (أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

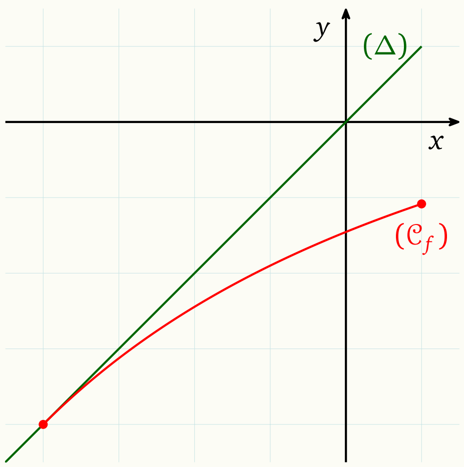
(ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزتيدة تماما ثمّ استنتج ثمّ استنتج أنّها متقاربة

2. (أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثمّ عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n

(ب) أثبت أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \dfrac{3}{v_n+1}$ ثمّ استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 4

علوم – 2017 – الموضوع الثاني (4 نقاط)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

f هي الدالة المعرّفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

الجزء الأوّل تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثمّ بيّن أنّ :

من أجل كل $x \in [-4;1]$ فإنّ $f(x) \in [-4;1]$

الجزء الثاني (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-4 < u_n \leqslant 0$

ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثمّ احسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \cdots + v_{2016} \times u_{2016}$

تمرين 5

علوم – 2016 – الموضوع الأول (5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0;4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1. (أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leqslant u_n \leqslant 4$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة

3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

4. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

(أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0

(ب) اكتب v_n بدلالة n

(ج) استنتج أنّ : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 6

علوم – 2016 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$ و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول v_0

2. (أ) عبّر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(ج) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3. (أ) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

(ب) تحقق أنّ : $\frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n+2}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n

(ج) استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$

تمرين 7

علوم – 2015 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3
2. أثبت أنّه م أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$
3. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة ؟ علّل
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$
   (ا) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأوّل
   (ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$
   (ج) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

تمرين 8

علوم – 2015 – الموضوع الثاني (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني

1. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$
2. ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$
3. مثّل $(\mathcal{C}_f)$ و (D) على المجال $[0;6]$

الجزء الثاني نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1. (ا) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها
   (ب) خمّن اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)
2. (ا) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leqslant 5$ حيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$
   (ب) استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)
3. (ا) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$
   (ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
   (ج) استنتج أنّ : $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n)

تمرين 9

علوم – 2014 – الموضوع الأول (4 نقاط)

لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول
2. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n
3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$
4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
5. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$
   (ا) بيّن أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$
   (ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$

تمرين 10

علوم – 2014 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

الجزء الأول نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدّها العام : $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}-n}$

(العدد e هو أساس اللوغاريبم النيبيري)

1. بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل
2. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

الجزء الثاني نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ (ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

1. عبّر عن v_n بدلالة n ثمّ استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
2. (ا) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \cdots \times u_n)$
   (ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

تمرين 11

علوم – 2013 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)

الجزء الأول المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول

2. احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$

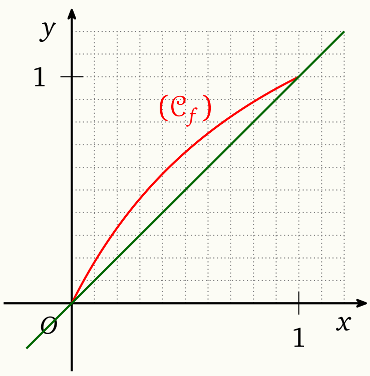
الجزء الثاني المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leqslant u_n \leqslant 6$
2. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
3. (ا) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $6 - u_{n+1} \leqslant \frac{5}{6}(6 - u_n)$

   (ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leqslant (6 - u_n) \leqslant v_n$. استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 12

علوم – 2013 – الموضوع الثاني (4 نقاط)



في الشكل المقابل، $(\mathcal{C}_f)$ هو التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ، و (d) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول ، $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

   (ا) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل

   (ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2. (ا) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

   (ب) برهن بالتراجع أنّه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

   (ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

   (ا) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0

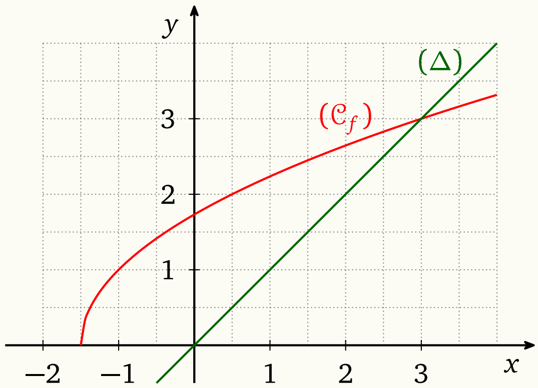
   (ب) احسب نهاية (u_n)

تمرين 13

علوم – 2012 – الموضوع الأوّل (5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدّها الاول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-\frac{3}{2};+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\sqrt{2x+3}$ ، $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس. (انظر الشكل المقابل)



(أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الانشاء)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

3. (أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 14

علوم – 2012 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية بحدّها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما

3. برّر لماذا (u_n) متقاربة ؟

4. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-3)$

(أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول

(ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times\cdots\times(u_n-3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$

تمرين 15

علوم – 2011 – الموضوع الأوّل (3 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n+1$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+\frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

1. المتتالية (v_n) :

(ا) حسابية (ب) هندسية (ج) لا حسابية و لا هندسية

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

(ا) $+\infty$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \cdots + e^{n\ln 3}\right)$

(ا) $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ (ب) $S_n = \frac{1-3^n}{4}$ (ج) $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

تمرين 16

علوم – 2011 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1. (ا) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α

(ب) اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثمّ استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n

(ج) عيّن قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها (u_n) متقاربة

2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

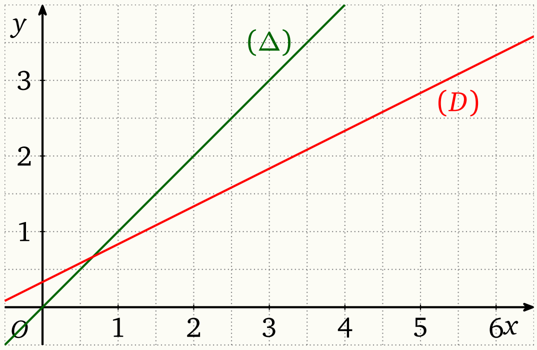
احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

تمرين 17

علوم – 2010 – الموضوع الثاني (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثّلنا المستقيمين

(Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$



1. لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$

(ا) انقل الشكل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

(ب) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

(ج) أعد تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية u_n

2. **(ا)** باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>\frac{2}{3}$

(ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n=u_n-\frac{2}{3}$

(ا) بيّن أنّ المتتالي (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول

(ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و استنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

تمرين 18

علوم – 2009 – الموضوع الأول (3,5 نقاط)

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. احسب v_0 و v_1
2. برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها
3. (أ) احسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$
   (ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$
   (ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

تمرين 19

علوم – 2009 – الموضوع الثاني (5 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1. (أ) احسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1
   (ب) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n
   (ج) احسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$
2. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$
   (أ) احسب v_2 و v_3
   (ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$
   بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
   (ج) اكتب w_n بدلالة n ثمّ استنتج v_n بدلالة n

تمرين 20

علوم – 2008 – الموضوع الأول (4 نقاط)

1. نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I = [1;2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+2}$
   (أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على I
   (ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ تنتمي إلى I
2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n ينتمي إلى I

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنّها متقاربة

3. (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

(ب) عيّن النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 21

علوم – 2008 – الموضوع الثاني (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1. (أ) ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

(ب) باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

(ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2. (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leqslant 6$

(ب) تحقق أنّ (u_n) متزايدة

(ج) هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 6$

(أ) أثبت أنّ المتتالية v_n هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول

(ب) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2 شعبة تقني رياضي

تمرين 22

تقني رياضي – 2017 – الدورة الاستثنائية الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{a}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an}u_n$

حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2

1. (أ) بيّن أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n: $u_n > 0$

   (ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an}u_n$

   (أ) أثبت أنّ المتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ و عيّن حدّها الأول v_1 بدلالة a

   (ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثمّ استنتج عبارة u_n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n$

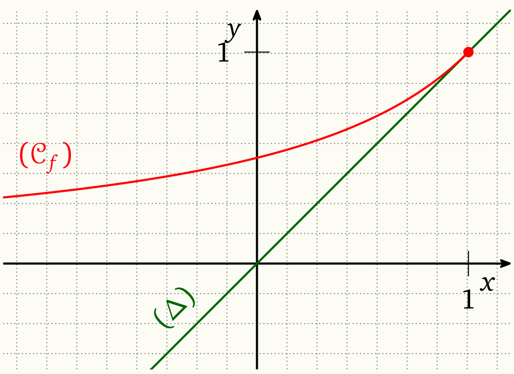
   ثمّ عيّن قيمة a حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

تمرين 23

تقني رياضي – 2017 – الموضوع الأول (7 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;1[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$



$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$، و ليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

(u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. أعد رسم الشكل المقابل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزما خطوط التمثيل ، ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها
2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 1$
3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة
4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

   (أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثمّ عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n

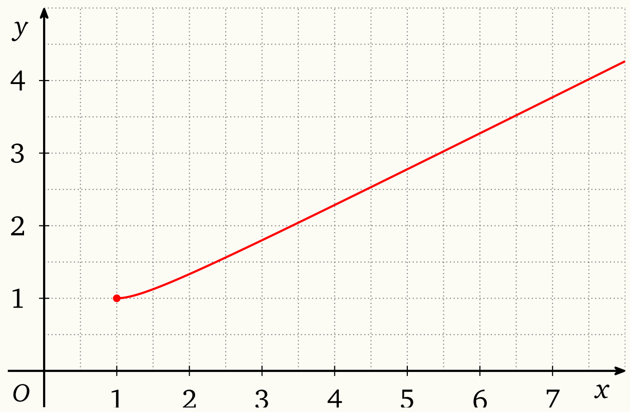
(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 24

تقني رياضي – 2016 – الموضوع الثاني (5 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$، (الشكل التالي)



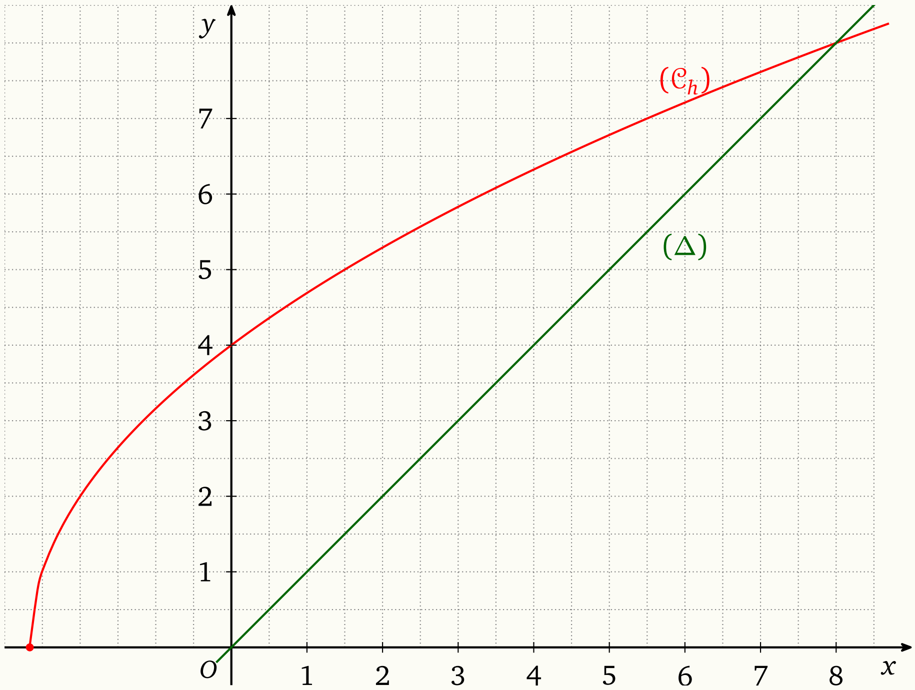
1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$
2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$
   (ا) انقل المنحنى المقابل ثمّ مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل موضحا خطوط الإنشاء
   (ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها
   (ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leqslant u_n\leqslant 6$
   (د) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
   (ه) برّر تقارب المتتالية (u_n)
3. نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$
   (ا) برهن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدّها الأول
   (ب) اكتب w_n بدلالة n ثمّ v_n بدلالة n
   (ج) بيّن أنّ : $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4. احسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n=\dfrac{1}{w_0}+\dfrac{1}{w_1}+\cdots+\dfrac{1}{w_n}$

تمرين 25

تقني رياضي – 2015 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

1. h الدالة المعرفة على المجال $]-\frac{8}{3}; +\infty[$ بما يلي : $h(x) = \sqrt{6x+16}$ و $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل التالي)



(ا) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها

2. (ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < 8$

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

(ج) استنتج اتجاه تغيّر (u_n)

3. (ا) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(8-u_n)$

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leqslant 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 26

تقني رياضي – 2014 – الموضوع الأول (4 نقاط)

الجزء الأول f هي الدالة المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\ln(x-1)$

1. حدّد حسب قيم x ، إشارة $f(x)-x$
2. (أ) عيّن اتجاه تغيّر f
   (ب) بيّن أنّه إذا كان $x\in[2;e+1]$ فإنّ $f(x)\in[2;e+1]$

الجزء الثاني (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=e+1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n-1)$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n\in[2;e+1]$
2. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
3. برّر تقارب المتتالية (u_n) ، ثمّ احسب نهايتها

تمرين 27

تقني رياضي – 2014 – الموضوع الثاني (5 نقاط)

n و p عددان طبيعيان

1. ادرس، حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n
2. نضع : $C_n=16n+9$ و $D_p=5^p$
   (أ) بيّن أنّه إذا كان $p=4k+2$ حيث k عدد طبيعي ، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n=D_p$
   (ب) عيّن n من أجل $p=6$
3. f هي الدالة المعرّفة على الجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=5^{4x+2}-9$
   ادرس تغيّرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$
4. (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=1$ و من أجل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=5^4\left(u_n+\dfrac{9}{16}\right)-\dfrac{9}{16}$
   (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{5^{4n+2}-9}{16}$
   (ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ u_n عدد طبيعي
5. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

تمرين 28

تقني رياضي – 2013 – الموضوع الأول (4 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = \mathrm{e}^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{\mathrm{e}}}$$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على n كما يلي : $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول
2. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
4. احسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

تمرين 29

تقني رياضي – 2011 – الموضوع الأول (5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثمّ استنتج أنّ : $u_n > 1$
2. ادرس اتجاه تغيّر (u_n) ثم بيّن أنّها متقاربة ، احسب نهاية (u_n)
3. ليكن الجداء p_n المعرّف كما يلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$

   برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$
4. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = \ln u_n$ حيث $\ln$ دالة اللوغاريتم النيبيري

   عبّر بدلالة p_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$

تمرين 30

تقني رياضي – 2011 – الموضوع الثاني (7,5 نقاط)

الجزء الأول f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. ادرس تغيّرات الدالة f
2. عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

3. بيّن أنّ للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثمّ اكتب معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عندها
4. لتكن g الدالة العددية العرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=f(x)-x$
   (أ) ادرس تغيّرات الدالة g
   (ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2{,}7<\alpha<2{,}8$
5. (أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$
   (ب) ارسم المماس و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحى $(\mathcal{C}_f)$

الجزء الثاني (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1. باستخدام $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $1\leqslant u_n<\alpha$
3. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما
4. استنتج أنّ (u_n) متقاربة و بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

تمرين 31

تقني رياضي – 2008 – الموضوع الأول (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

1. (أ) ادرس تغيّرات الدّالّة f على المجال $[0;2]$
   (ب) أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدّالّة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (الوحدة على المحورين $4\,\text{cm}$)
   (ج) برهن أنّه إذا كان $x\in[0;2]$ فإنّ $f(x)\in[0;2]$
2. نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$
   (أ) برّر وجود المتتالية (u_n) . احسب الحدّين u_1 و u_2
   (ب) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 علة محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$
   (ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق
3. (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{3}$
   (ب) برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $u_{n+1}>u_n$
   ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n) ؟
   (ج) تحقق أنّ : $u_{n+1}-\sqrt{3}\leqslant\dfrac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\left(u_n-\sqrt{3}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم
   عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث : $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\leqslant k\left|u_n-\sqrt{3}\right|$
   بيّن أنّه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant k^n\left|u_0-\sqrt{3}\right|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 32

تقني رياضي – 2008 – الموضوع الثاني (8 نقاط)

1. f الدّالة العددية المعرّفة على $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الأطوال $2\,\text{cm}$)

(ا) احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة التعريف

(ب) ادرس اتجاه تغيّر f ثمّ شكل جدول تغيّراتها

(ج) بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_f)$ و (D)

(د) بيّن أنّ صورة المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$

(ا) باستخدام $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ، مثّل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل

(ب) خمّن اتجا تغيّر و تقارب المتتالية (u_n)

(ج) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1\leqslant u_n\leqslant\dfrac{5}{2}$ و أنّ المتتالية (u_n) متزايدة

(د) استنتج أنّ (u_n) متقاربة و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3 شعبة رياضيات

تمرين 33

رياضيات – 2017 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 7u_n + 8$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_n = 7^{n+1} - 4$
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   (أ) احسب بدلالة n المجموع S_n ثمّ جد علاقة بين S_n و S'_n
   (ب) استنتج أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$
3. (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5
   (ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسة على 5

تمرين 34

رياضيات – 2016 – الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تمام، حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 و أساسها q حيث : $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = \mathrm{e}^4(1 + \mathrm{e}^3) \end{cases}$

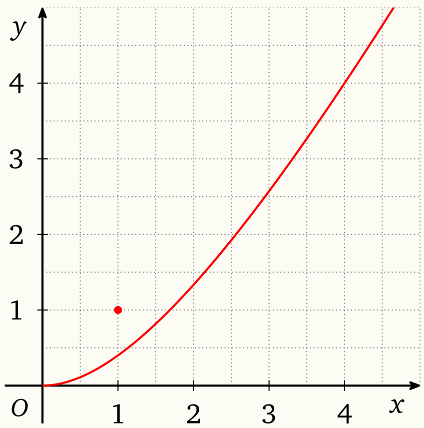
1. احسب u_1 و u_2 ثمّ استنتج قيمة الأساس q
2. نضع : $u_1 = \mathrm{e}^4$ و $q = \mathrm{e}^3$
   (أ) عبر عن u_n بدلالة n
   (ب) نضع : $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n$. احسب S_n بدلالة n
3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n = n + 3$
   (أ) بيّن أنّ : $\mathrm{PGCD}(2S_n; a_n) = \mathrm{PGCD}(a_n; 14)$
   (ب) عيّن القيم الممكنة لـ : $\mathrm{PGCD}(2S_n; a_n)$
   (ج) عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $\mathrm{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$
4. ادرسس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
5. نضع : $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016}$
   عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0\ [7] \\ a_n \equiv 0\ [5] \end{cases}$
6. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $\left(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52\right)$ يقبل القسمة على 7

تمرين 35

رياضيات – 2014 – الموضوع الأول (4,5 نقاط)

الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ كما هو مبيّن في الشكل المقابل :



1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$
2. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،
$u_{n+1}=f(u_n)$
(Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$
   - (أ) باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) مثّل على محور الفواصل، الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها
   - (ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها
3. (أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n\leqslant 3$
   - (ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة
   - (ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة
4. (أ) ادرس إشارة العدد $7u_{n+1}-6u_n$ و استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leqslant u_{n+1}\leqslant \dfrac{6}{7}u_n$
   - (ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leqslant u_n\leqslant 3\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$
   - (ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

تمرين 36

رياضيات – 2014 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=16$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=6u_n-9$

1. (أ) احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7
   - (ب) خمّن قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث : $u_{2k}\equiv a\ [7]$ و $u_{2k+1}\equiv b\ [7]$
2. (أ) برهن أنّه ، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2}\equiv u_n\ [7]$
   - (ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k، $u_{2k}\equiv 2\ [7]$ ، ثمّ استنتج أنّ : $u_{2k+1}\equiv 3\ [7]$
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\dfrac{9}{5}$
   - (أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول
   - (ب) احسب، بدلالة n ، كلا من u_n و S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

تمرين 37

رياضيات – 2011 – الموضوع الأول (4 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تُحقق : $\begin{cases} u_4 = 15 \\ d + m = 42 \end{cases}$ حيث $\begin{cases} m = \text{PPCM}(u_3; u_5) \\ d = \text{PGCD}(u_3; u_5) \end{cases}$

1. عيّن الحدّين u_3 و u_5 ثمّ استنتج u_0
2. اكتب u_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ 2010 هو حد من حدود (u_n) و عيّن رتبته
3. عيّن الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080
4. n عدد طبيعي غير معدوم.
   (أ) اكتب بدلالة n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n}$
   (ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1}$

تمرين 38

رياضيات – 2009 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

(u_n) المتتاليو المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$ (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان

1. عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها و حدّها الأول
2. احسب كلا من v_n و u_n بدلالة n
3. احسب المجموعين S و S' حيث : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
4. (أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5
   (ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5

تمرين 39

رياضيات – 2008 – الموضوع الأول (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

(الوحدة على المحورين 2 cm)

1. (أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ و فسّر النتيجة هندسيا
   (ب) ادرس تغيّرات الدالة f
   (ج) باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$

(د) ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

2. نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(ا) باستعمال (D) و $(\mathcal{C}_f)$ ، مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3. (ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ و $u_{n+1} > u_n$

(ب) استنتج أنّ (u_n) متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 40

رياضيات – 2008 – الموضوع الثاني (4 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3

2. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(ا) برهن بالترجع أنّ (v_n) متتالية ثابتة

(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. (w_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

احسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$