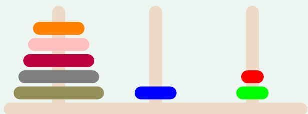
نهائي علوم و رياضيات

السلسلة 05

المتتاليات

2017-2018

لنتأمل أحجية بسيطة (لعبة رياضية) تسمّى برج هانوي، اخترعها عام 1883 عالم الرياضيات **(Eduard Lucas)**. نُعطي برجا من ثمانية أقراص مثقوبة المراكز، مكدّسٌ بعضها فوق بعض تبعا لتناقص قياساتها، أي يكون الصغير فوق الكبير، و يخترقها جميعا واحدٌ من ثلاثة أعمدة كما يبيّن الشكل



الهدف هو نقل كامل البرج إلى أحد العمودين الآخرين مع الالتزام بالشرطين الآتيين :

- يُسمح بنقل قرص واحد فقط في النقلة الواحدة
- لا يسمح بوضع قرص فوق قرص أصغر منه

عرض **(Lucas)** لُعبته، و ذكر أسطورة تحكي قصة برج أكبر، يسمّى برج براهما، مكوّن من أربعة و ستين قرصا من الذهب الخالص، و ثلاثة أعمدة من الألماس. في البدء وُضعت هذه الأقراص الذهبية مرتبة تبعا لقياسها فوق أحد الأعمدة، و أُمرت مجموعة من الرهبان بنقل البرج إلى العمود الثالث مع الالتزام بالقواعد التي سبق ذكرها. و انطلق الرهبان يعملون ليل نهار لأداء هذه المهمّة معتقدين أنّ نهاية العالم ستقع عند انتهائهم من نقل البرج **!**.

السؤال : ما هو عدد النقلات اللازم و الكافي لأداء المهمّة ؟

الجواب : يُمكن البرهنة بالتراجع أنّه إذا كان n هو عدد الأقراص فأنّ $x_n = 2^n - 1$ هو عدد الحركات المطلوبة لحل هذه الأحجية و أنّ هذا العدد يحقق العلاقة التراجعية $x_{n+1} = 2x_n + 1$

في هذا المحور

- ◃ كيف نبرهن خاصية بالتراجع ؟
- ◃ كيف ندرس متتالية حسابية أو هندسية ؟
- ◃ كيف نبرهن أنّ متتالية محدودة ؟
- ◃ كيف ندرس اتجاه تغيّر متتالية ؟
- ◃ كيف نبرهن أنّ متتاليتين هما متجاورتان ؟
- ◃ تمارين و مسائل للتعمق

التمرين 1

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n-\frac{2a+4}{3}$
حيث a وسيط حقيقي

1. عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نفرض أنّ $a\neq\frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ، ثمّ اكتب عندئذٍ u_n بدلالة n و مجموع n حدا الأولى من المتتالية
3. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية ، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} و مجموع 50 حدا الأولى منها
4. نفرض أنّ $a=4$. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n=3^n+2$ ثمّ بيّن أنّ :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+4n+3\right)$$

التمرين 2

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي : $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$

1. (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n>-3$
   (ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما
   (ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة
2. لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث : $v_0=6$ و $\lim_{n\to+\infty}(v_0+v_1+\cdots+v_n)=18$
   (أ) بيّن أنّ : $\lim_{n\to+\infty}(v_0+v_1+\cdots+v_n)=\frac{v_0}{1-q}$
   (ب) احسب الأساس q ثمّ عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n
   (ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-3$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n

التمرين 3

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية بحدّهل الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ :
$u_{n+1}=\frac{2u_n+2}{u_n+3}$ و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$

1. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول v_0
2. (أ) عبّر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n
   (ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n
   (ج) احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$
3. (أ) احسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$
   (ب) تحقق أنّ : $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n
   (ج) استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\cdots+\frac{1}{u_n+2}$

BAC 2018

التمرين 4

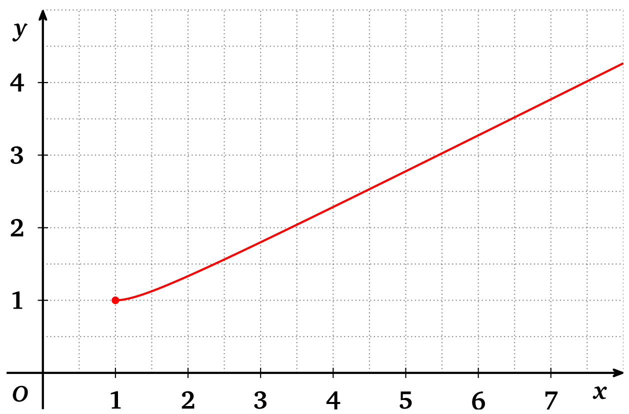
نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

1. احسب u_1 و u_2
2. (أ) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geqslant n$
   (ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n)
3. أثبت أنّ المتتالية (u_n) هي متزايدة
4. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - n + 1$
   (أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هي هندسية
   (ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3^n + n - 1$
5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   (أ) عبّر عن S_n بدلالة n
   (ب) ما هو اتجاه تغيّر المتتالية (S_n) و نهايتها ؟

التمرين 5

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (الشكل التالي)



1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$
2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
   (أ) انقل المنحنى المقابل ثمّ مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل موضحا خطوط الإنشاء
   (ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها
   (ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n \leqslant 6$
   (د) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
   (هـ) برّر تقارب المتتالية (u_n)
3. نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

(ا) برهن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدّها الأول

(ب) اكتب w_n بدلالة n ثمّ v_n بدلالة n

(ج) بيّن أنّ : $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. احسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \dfrac{1}{w_0} + \dfrac{1}{w_1} + \cdots + \dfrac{1}{w_n}$

التمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0;4]$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{13x}{9x+13}$

1. (ا) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leqslant u_n \leqslant 4$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة

3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

4. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \dfrac{13}{u_n}$

(ا) برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0

(ب) اكتب v_n بدلالة n

(ج) استنتج أنّ : $u_n = \dfrac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 7

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3

2. أثبت أنّه م أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

3. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة ؟ علّل

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$

(ا) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأوّل

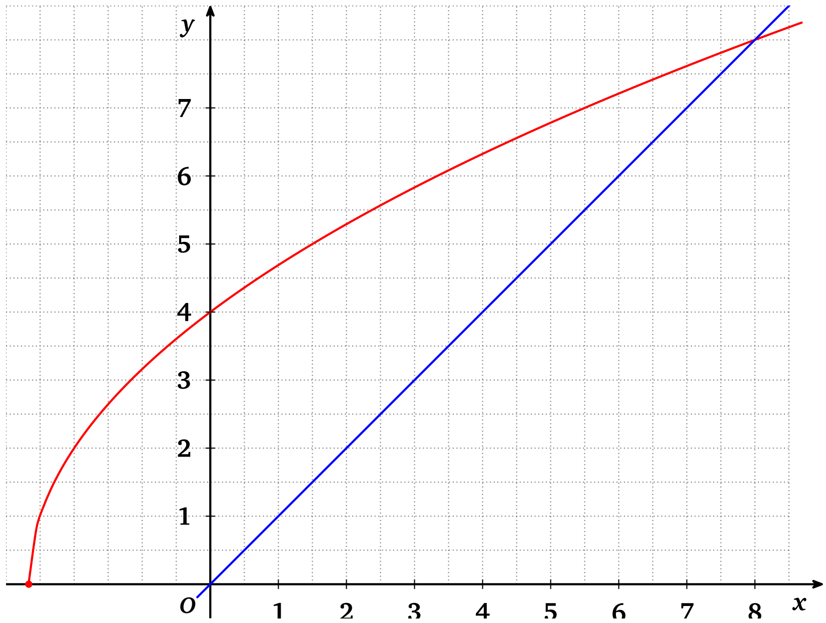
(ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(ج) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين 8

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

.1 h الدالة المعرفة على المجال $]-\frac{8}{3};+\infty[$ بما يلي : $h(x) = \sqrt{6x+16}$ و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل التالي)



(ا) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها

.2 (ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < 8$

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

(ج) استنتج اتجاه تغيّر (u_n)

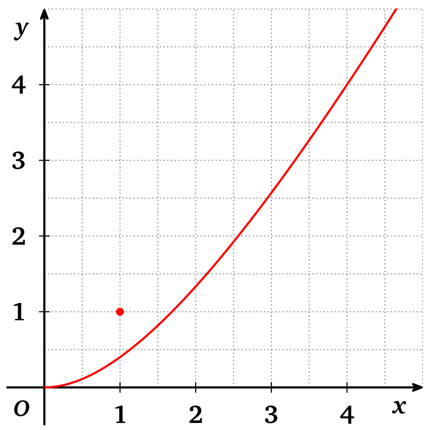
.3 (ا) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(8-u_n)$

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leqslant 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 9

الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ كما هو مبيّن في الشكل المقابل :



1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$

(أ) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) مثّل، على محور الفواصل، الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3. (أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n\leqslant 3$

(ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

(ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

4. (أ) ادرس إشارة العدد $7u_{n+1}-6u_n$ و استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leqslant u_{n+1}\leqslant \dfrac{6}{7}u_n$

(ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leqslant u_n\leqslant 3\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$

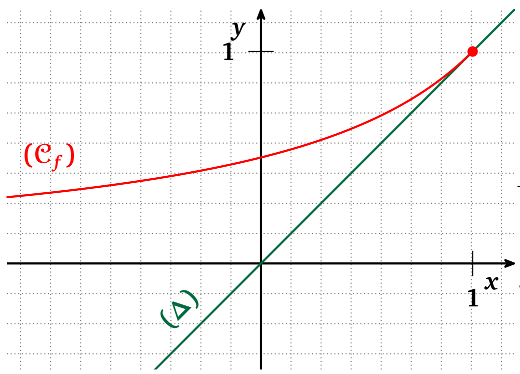
(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين 10

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;1]$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{1}{2-x}$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$، و ليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y=x$



(u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1. أعد رسم الشكل المقابل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزما خطوط التمثيل ، ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<1$

3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة

4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{2}{1-u_n}$

(أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثمّ عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 11

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{a}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an}u_n$

حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2

1. (ا) بيّن أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n: $u_n > 0$

(ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an}u_n$

(ا) أثبت أنّ المتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ و عيّن حدّها الأول v_1 بدلالة a

(ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثمّ استنتج عبارة u_n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n$

ثمّ عيّن قيمة a حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

التمرين 12

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1. احسب الحدّين u_1 و v_1

2. (ا) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

(ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما

3. نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_n - v_n$

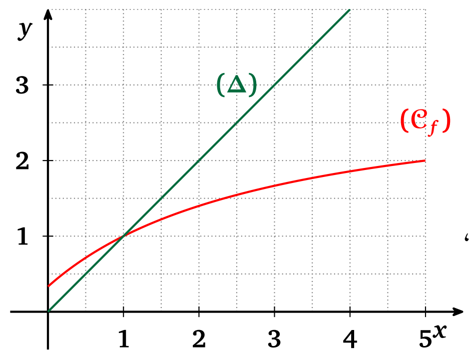
برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول w_0 ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n

4. بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

التمرين 13

نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و $(\mathscr{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

a عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = a$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$



1. عيّن قيم α حتى تكون (u_n)متتالية ثابتة

نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$

2. (أ) انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (دون حساب الحدود)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول

(ب) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$

ثمّ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_n+1} + \dfrac{1}{u_{n+11}+1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$

التمرين 14

الجزء الأول المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{5^{n+1}}{6^n}$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول

2. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الجزء الثاني المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leqslant u_n \leqslant 6$

2. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. (أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيهي n، $6 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{6}(6 - u_n)$

(ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيهي n ، $0 \leqslant (6 - u_n) \leqslant v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 15

(u_n) المتتالية العددية بحدّها الأول $u_0 = \dfrac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما

3. برّر لماذا (u_n) متقاربة ؟

4. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 3)$

(أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول

(ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)\times(u_1 - 3)\times\cdots\times(u_n - 3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

التمرين 16

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على بما يلي :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

1. (ا) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، لدينا: $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(ج) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، لدينا : $0 < u_n < 1$

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $x_n = u_1 \times u_2 \times\cdots\times u_n$

أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، لدينا : $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

3. نضع، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_n = \ln(u_n)$

(ا) برّر أنّ المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$

(ب) أثبت أنّ المتتالية (v_n) متزايدة

4. نضع $y_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. عبّر عن y_n بدلالة x_n

التمرين 17

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$$

1. احسب u_2 ، u_3 و u_4

2. (ا) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$

(ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

(ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n}{n}$

(ا) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هي هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول v_1

(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{n}{2^n}$

4. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \ln x - x\ln 2$

(ا) عيّن نهاية f عند $+\infty$

(ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 18

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $u_0=-1$ ، $u_1=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$$

1. احسب u_2 و استنتج أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية
2. نُعرف المتتالية (v_n) بوضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$
   (ا) احسب v_0، عبّر عن v_{n+1} بدلالة v_n و استنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها
   (ب) عبّر عن v_n بدلالة n
3. نُعرف المتتالية (w_n) بوضع، من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n=\frac{u_n}{v_n}$
   (ا) احسب w_0
   (ب) باستعمال المساواة $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$ ، عبّر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n
   (ج) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $w_{n+1}=w_n+2$
   (د) عبّر عن w_n بدلالة n
4. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_n=\frac{2n-1}{2^n}$$

5. نضع، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$
   أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$$

التمرين 19

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=\frac{1}{8}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$

1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x(2-x)$
   (ا) شكل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$
   (ب) برّر، أنّه من أجل كل $x\in]0;1[$ فإنّ $f(x)\in]0;1[$
2. (ا) احسب u_1 و u_2
   (ب) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$
   (ج) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=1-u_n$
   (ا) اكتب v_{n+1} بدلالة v_n
   (ب) اعط تخمينا لعبارة v_n بدلالة n ثمّ برهن صحة هذا التخمين بالتراجع
   (ج) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 20

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$ $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$

1. أثبت أنّ المتتالية (s_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$s_n = u_{n+1} + u_n$$

هي متتالية هندسية.

استنتج عبارة s_n بدلالة n

2. نضع $v_n = (-1)^n u_n$ و نعتبر المتتالية (t_n) المعرّفة بـ : $t_n = v_{n+1} - v_n$

اكتب t_n بدلالة s_n

3. اكتب v_n ، u_n ثمّ بدلالة (يُمكن حساب بطريقتين مختلفتين المجموع $t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$)

عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{8^n}$

التمرين 21

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

1. (ا) ادرس تغيّرات الدّالة f على المجال $[0;2]$
(ب) أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدّالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (الوحدة على المحورين $4\,\text{cm}$)
(ج) برهن أنّه إذا كان $x \in [0;2]$ فإنّ $f(x) \in [0;2]$

2. نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(ا) برّر وجود المتتالية (u_n) . احسب الحدّين u_1 و u_2
(ب) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 علة محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$
(ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق

3. (ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$
(ب) برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $u_{n+1} > u_n$
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n) ؟
(ج) تحقق أنّ : $u_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم
عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث : $\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant k\left|u_n - \sqrt{3}\right|$
بيّن أنّه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant k^n\left|u_0 - \sqrt{3}\right|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 22

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)}$
   استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
3. (ا) لتكن الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \ln x - x + 1$
   ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $\ln x \leqslant x - 1$
   (ب) باستعمال تغيير المتغيّر $X = \dfrac{1}{x}$ في المتباينة السابقة، أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x$
   (ج) استنتج من السؤالين السابقين أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p :

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}$$

4. n عدد طبيعي غير معدوم
   (ا) اكتب الحصر المحصل عليه في السؤال **3 (ج)** من أجل القيم لـ p المتغيّرة من n إلى $2n-1$
   (ب) بجمع طرفا إلى طرف هذه المتباينات المضاعفة، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n \leqslant \ln 2 \leqslant u_n + \frac{1}{2n}$$

   (ج) استنتج حصرا للعدد $\ln 2 - u_n$ ثمّ استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو $\ln 2$

التمرين 23

1. لتكن الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x$$

   (ا) عيّن نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$
   (ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$
   (ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$. تحقق أنّ $0{,}8 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}9$
2. لتكن الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
   و المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = g(u_n)$
   (ا) شكل جدول تغيّرات الدالة g ثمّ أنشئ $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$
   (ب) مثل على محور الفواصل الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية مبرزا خطوط الإنشاء
   (ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها
   (د) نقبل أنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو ℓ. احسب هذا العدد ℓ