2013

الدرس الثاني

الاشتقاقية

إعداد : الأستاذ كمال. حامدي

2

ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة

2

المحتوى

تعاريف (تذكير)

العدد المشتق - الدالة المشتقة

تعريف

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي a

نقول أنّ f قابلة للاشتقاق عند a و عددها المشتق عند a هو العدد الحقيقي $f'(a)$ إذا كان:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

أو

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(x)$$

- القول أنّ f قابلة للاشتقاق على I يعني أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل عدد حقيقي a من I
- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I، فإنّ الدالة المشتقة للدالة f على I هي الدالة التي يُرمز لها f' و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد المشتق $f'(x)$

المماس لمنحنى دالة. التقريب التآلفي

العدد المشتق $f'(a)$ هو معامل توجيه المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a. معادلة لهذا المماس هي:

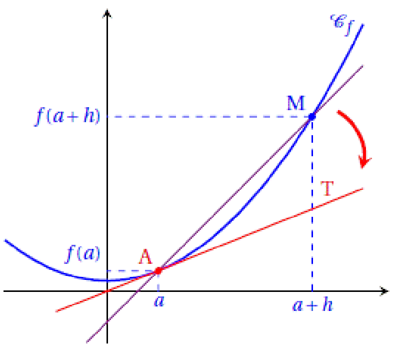
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

محليا ، يُمكن استبدال الدالة f بالدالة التآلفية المثلة بالمستقيم (T).

أي من أجل x قريب من a، يُمكن استبدال $f(x)$ بـ $f'(x)(x-a)+f(a)$

أو بوضع $x = a+h$، و من أجل h قريب من الصفر، يُمكن استبدال $f(a+h)$ بـ $f'(a)\times h + f(a)$ و نكتب :

$$f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a)$$



ملاحظة

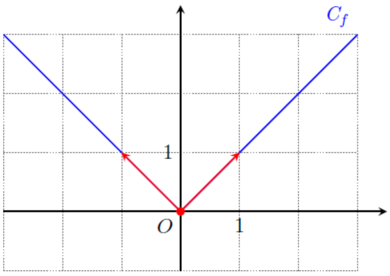
في الفيزياء، نكتب $\Delta f = f'(a)\Delta x$ للتعبير عن هذا التقريب ونكتب :

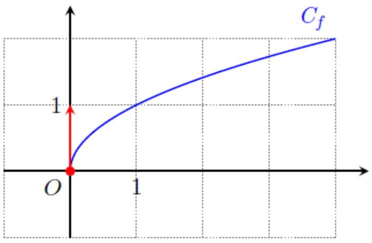
$$f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

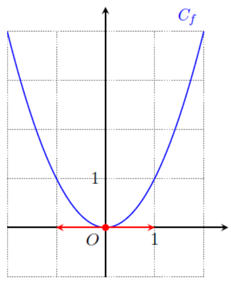
أو

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

أمثلة قابلية اشتقاق الدوال $x \mapsto x^2$ ، $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto |x|$ عند الصفر و تفسيراتها الهندسية







- الدالة $x \mapsto x^2$ قابلة الاشتقاق عند 0 و عددها المشتق عند الصفر هو $f'(0) = 0$
  التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2$ يقبل في النقطة $(0,0)$ مماسا أفقيا (معامل توجيهه معدوم)
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ غير قابلة الاشتقاق عند 0. لماذا ؟
  التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ يقبل في النقطة $(0,0)$ مماسا عموديا (ليس له معامل توجيه)
- الدالة $x \mapsto |x|$ غير قابلة الاشتقاق عند 0. لماذا ؟
  التمثيل البياني للدالة $x \mapsto |x|$ يقبل في النقطة $(0,0)$ نصف مماس من اليمين (معامل توجيهه 1) و نصف مماس من اليسار (معامل توجيهه -1)

ملاحظة : الاستمرارية و الاشتقاقية

كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال I هي دالة مستمرة على I. و العكس غير صحيح

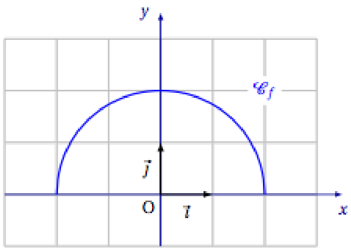
تطبيقات

تطبيق 1 قابلية اشتقاق دالة صمّاء عند عدد

f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

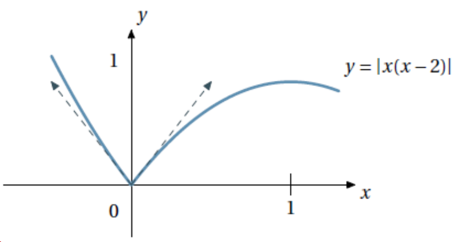
و ليكن تمثيلها البياني التالي:



1. التخمينات: هل الدالة f قابلية اشتقاق عند 0 ؟ عند 2 ؟
2. باستعمال تعريف قابلية اشتقاق دالة عند عدد ، أثبت صحة كل تخمين.

تطبيق 2 قابلية اشتقاق دالة بالقيمة المطلقة عند عدد

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = |x(x-2)|$ و ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني



1. أثبت أنّ f قابلة للاشتقاق من اليمين عند 0
   (ب) عيّن معادلة للمماس من اليمين للمنحنى $\mathcal{C}$ عند النقطة A
2. أثبت أنّ f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 0
   (ب) عيّن معادلة للمماس من اليسار للمنحنى $\mathcal{C}$ عند النقطة A
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 ؟

تطبيق 3 استعمال التعريف

1. لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = x\sqrt{x}$
2. برّر قابلية اشتقاق الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و أحسب $f'(x)$
3. أثبت، باستعمال تعريف العدد المشتق، أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0

قواعد الاشتقاق

مشتقات الدوال المألوفة - المشتقات و العمليات على الدوال

مشتقات الدوال المألوفة		
$f(x) = \cdots$	$f'(x) = \cdots$	مجالات قابلية الاشتقاق
$a \in \mathbb{R}$		$]-\infty; +\infty[$
x		$]-\infty; +\infty[$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$		$]-\infty; +\infty[$
$\frac{1}{x}$		$]-\infty; 0[$ أو $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$		$]-\infty; 0[$ أو $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$		$]0; +\infty[$
$\cos x$		$]-\infty; +\infty[$
$\sin x$		$]-\infty; +\infty[$
$\tan x$		على كل مجال من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

المشتقات و العمليات	
$f = \cdots$	$f' = \cdots$
$u + v$	$u' + v'$
$ku \quad (k \in \mathbb{R})$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$

الدالة المشتقة لدالة مركبة

مبرهنة

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I و تأخذ قيمها في مجال J و إذا كانت الدالة v قابلة للاشتقاق على J فإنّ الدالة المعرفة على I بـ $(x) = v[u(x)]$ تقبل الاشتقاق على I و من أجل كل x من I:

$$f'(x) = u'(x)v'[u(x)]$$

نتائج و أمثلة

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I	فإنّ الدالة التالية قابلة للاشتقاق على I	و دالتها المشتقة هي:	أمثلة	
$n \in \mathbb{N}^*$	u^n		$f(x) = \left(\frac{3x-5}{x-1}\right)^3$ $g(x) = (2x^2 + x - 1)^4$ $h(x) = \sin^2 x$	
$n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{u^n}$		$f(x) = \frac{1}{(x^3 + x^2 + 1)^5}$	
و من أجل كل x من I حيث $u(x) > 0$	$\sqrt{u}$		$f(x) = \sqrt{x^6 + 2}$ $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$	
	$\cos u$		$f(x) = \cos\sqrt{x}$ مع $x > 0$ $g(x) = \cos\frac{\pi}{x}$	
	$\sin u$		$f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ $g(x) = \sin(x^2)$	

تطبيقات

تطبيق 4 حساب المشتقات

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

1. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$

تطبيق 5 قابلية الاشتقاق عند عدد و حساب $f'(x)$

الدالة f معرفة على $D = \mathbb{R} - \{-1;1\}$ بما يلي: $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

1. عيّن عددين حقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in D$،

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

2. n عدد طبيعي غير معدوم، استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$

تطبيقات الاشتقاقية

اتجاه التغيّر

مبرهنة

f هي دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة تماما على I فإنّ الدالة f متزايدة تماما على I
- إذا كانت f' سالبة تماما على I فإنّ الدالة f متناقصة تماما على I
- إذا كانت f' هي الدالة المعدومة على I فإنّ الدالة f ثابتة على I

مثال : f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 3x^2$

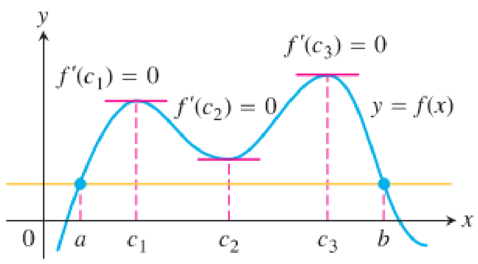
من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) \geq 0$. إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

القيم الحدّية المحلية

تعريف

f هي دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و c عدد حقيقي من I. القول أنّ $f(c)$ هي قيمة حدّية محلية عظمى للدالة f يعني وُجود مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل c، بحيث من أجل كل x من J: $f(x) \leqslant f(c)$

بطريقة مماثلة نُعرف القيمة الحدّية المحلية الصغرى

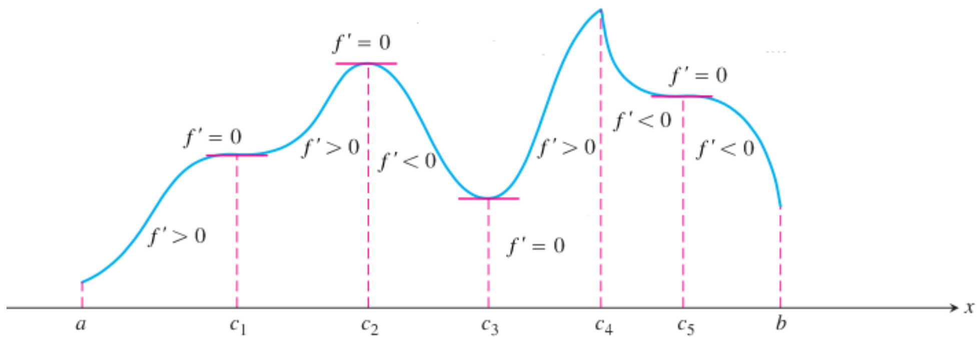


مبرهنة

f هي دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و c عدد حقيقي من I

- إذا كانت $f(c)$ قيمة حدّية محلية فإنّ $f'(c) = 0$
- إذا انعدمت f' عند c مغيّرة إشارتها فإنّ $f(c)$ قيمة حدّية محلية

مثال: عيّن القيم الحدّية



تنبيه

إذا كانت $f(c)$ قيمة حدّية محلية فإنّ المماس للمنحني في النقطة $A(c; f(c))$ في $\mathcal{C}_f$ يكون أفقياً

استعمال العدد المشتق لحساب بعض النهايات

المبدأ: لإزالة حالة عدم تعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$" للدالة f عند a، يمكن كتابة عبارة $f(x)$ على الشكل $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ مع g قابلة للاشتقاق عند a. عندئذ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g'(a)$

مثال: f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{(2+x)^5 - 32}{x}$. النهاية عند 0 تُؤدي إلى حالة عدم تعيين.

بوضع $g(x) = (2+x)^5$، أحسب نهاية f عند 0.

تطبيقات

تطبيق 6 دراسة اتجاه تغيّر دالة كثير حدود

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3$

عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

عيّن الدالة المشتقة للدالة f و أدرس إشارتها

شكل جدول تغيّرات الدالة f ثمّ أنشئ تمثيلها البياني $\mathcal{C}$ في معلم متعامد و متجانس

تطبيق 7 دراسة اتجاه تغيّر دالة ناطقة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{4}{x-2}$

أدرس اتجاه تغيّر الدالة f و أثبت أنّ $\frac{23}{2}$ هو قيمة حدّية محلية صغرى للدالة f على المجال $]2; +\infty[$

تطبيق 8 دراسة اتجاه تغيّر دالة صمّاء

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$ و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1. أثبت أنّ محور التراتيب هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}$
2. عيّن الدالة المشتقة للدالة f. شكل جدول تغيّرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$
3. أثبت أنّ المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}$ عند $+\infty$
4. أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ و مستقيماته المقاربة

دراسة الدوال المثلثية

الدالة $x \mapsto \tan x$

تعريف

الدالة ظل، التي نرمز لها tan هي الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، بـ :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\cos x \neq 0$ يعني $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$. إذن مجموعة تعريف الدالة tan هي $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

خواص

من أجل كل عدد حقيقي x من D، $\tan(x+\pi) = \tan x$ **(1)** و $\tan(-x) = -\tan x$ **(2)**

تنبيه

نقول أنّ الدالة tan هي:

(1) دورية و دورها π

(2) فردية

البرهان

إذا كان x ينتمي إلى D فإنّ $x+\pi$ و $-x$ ينتميان كذلك إلى D و :

$$(1) \quad \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

$$(2) \quad \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

دراسة الدالة tan

خاصية

الدالة tan قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي من D و :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

البرهان الدالتان sin و cos قابلتان للاشتقاق على كل مجال من D و :

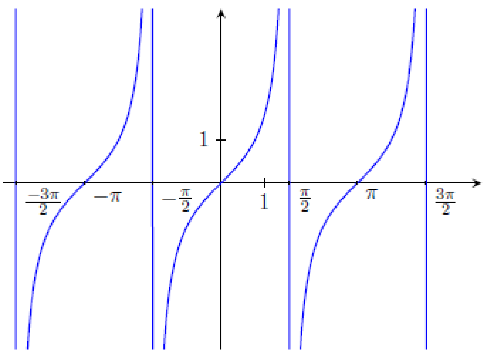
$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

جدول التغيّرات و التمثيل البياني

- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$، $\tan'(x) > 0$، إذن الدالة tan متزايدة تماما على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
  $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ و $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ و بما أنّ $\cos x > 0$ على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$
- في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نُنشئ المنحنى الممثل للدالة tan على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$، ثمّ بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ O نحصل على المنحنى Γ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. ثمّ نُطبق على المنحنى Γ انسحابات ذات الأشعة $k\pi\vec{i}$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تنبيه

حسب الخاصتين (1) و (2) فإنّه يُمكن اختصار دراسة الدالة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$



x	0		$\frac{\pi}{2}$
$tan'(x)$	1	$+$	‖
$tan(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

تمارين و مسائل للتعمق

نهاية دالة

حل تمارين و إرشادات