2013

الدرس الثالث

# الدالة الأسية

إعداد: الأستاذ كمال. حامدي

3

ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة

3

## المحتوى


نشاط : طريقة Euler لإنشاء منحني الدالة الأسية ..... 1
تعاريف و خواص الدالة الأسية ..... 3
دراسة الدالة الأسية و نهايات التزايد المقارن ..... 5
المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ ..... 7
أعمال موّجهة ..... 9
تمارين و مسائل للتعمق ..... 10
حل تمارين و إرشادات ..... 13


# نشاط : طريقة Euler لإنشاء منحني الدالة الأسية

**تذكير بمفهوم التقريب التآلفي:** $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح I

إذا قبلت الدالة $f$ الاشتقاق عند $x_0$ من I فإنه من أجل كل عدد حقيقي $h$ قريب من 0 حيث $x_0 + h$ ينتمي إلى I لدينا :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

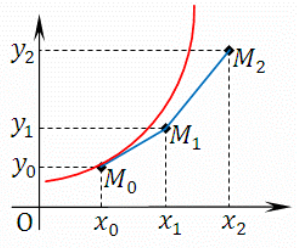
يُسمى $f(x_0) + hf'(x_0)$ التقريب التآلفي لـ $f(x_0 + h)$ من أجل h قريب من 0.

## طريقة أولر (Euler)

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. نُسمي $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

تسمح لنا طريقة أولر، ابتداءً من النقطة المعلومة $M_0(x_0; y_0)$ من المنحني $(\mathcal{C})$ و بمعرفة $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$، بإنشاء تمثيل تقريبي للمنحني $(\mathcal{C})$.

نختار $h$ عددا حقيقيا موجبا تماما و قريبا من الصفر.




1. نُنشئ النقطة $M_0(x_0; y_0)$

نضع: $x_1 = x_0 + h$، إذن : $f(x_1) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ .

و بوضع: $y_1 = y_0 + hf'(x_0)$ نُنشئ النقطة $M_1(x_1; y_1)$

نضع: $x_2 = x_1 + h$، إذن: $f(x_2) \approx f(x_1) + hf'(x_1)$.

و بوضع: $y_2 = y_1 + hf'(x_1)$ نُنشئ النقطة $M_2(x_2; y_2)$

و هكذا... نتبع نفس الطريقة لإنشاء النقط $M_3(x_3; y_3)$، ...، $M_n(x_n; y_n)$

حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = y_{n-1} + hf'(x_{n-1})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

2. نُنشئ القطع المستقيمة $[M_0M_1]$، $[M_1M_2]$، ...$[M_{n-1}M_n]$ و نحصل على خط مضلع (منكسر) .

و كل ما كان h قريبا من الصفر يكون الخط المضلع قريبا من المنحني $(\mathcal{C})$.

## استعمال مجدول Excel

في ورقة حساب لمجدول، نحسب القيم التقريبية للدالة $f$ من أجل $h = 0,5$.

كما هو مبيّن في الشكل على الهامش، نكتب قيم العدد الحقيقي $x_i$ في العمود A، ثمّ نحسب في العمود B، القيم $y_i$.

نُسجل قيمة h في الخلية B1.

- نحجز في الخلية A3 العدد $-3$ و في A4 العلاقة $\boxed{= A3 + \$B\$1}$

( يُستعمل الرمز $ لتثبيت محتوى الخلية B1) ، نحدد الخلية A4 و باستعمال الزالق نسحب إلى الأسفل حتى يظهر العدد 3.

- في الخلية B9 نحجز العدد 1.

في الخلية B10 نحجز العلاقة $\boxed{= B9 * (1 + \$B\$1)}$ نحدد هذه الخلية و نسحب إلى الأسفل

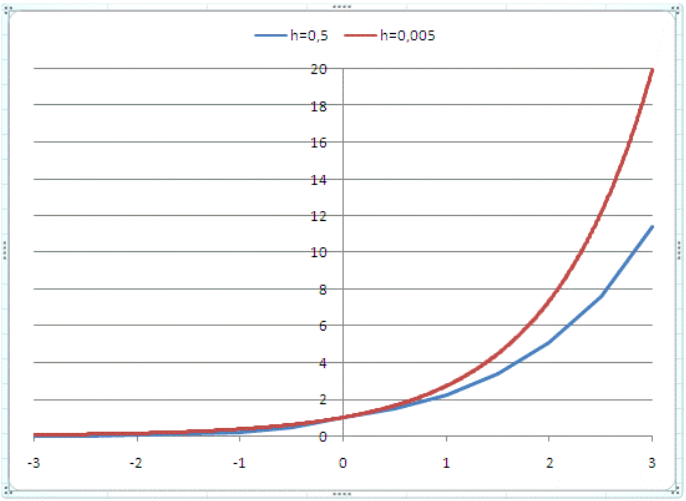
في الخلية B8 نحجز العلاقة $\boxed{= B9 * (1 - \$B\$1)}$ نحدد هذه الخلية و نسحب إلى الأعلى

فنحصل على الجدول على الهامش.

- نُعيد نفس العملية بأخذ الخطوة $h = 0,005$.
- باستعمال مساعد راسم البيانات للمجدول، نحصل على التمثيلين البيانيين التاليين

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | h= 0,5 | |
| 2 | Xi | Yi |
| 3 | -3 | |
| 4 | =A3+$B$1 | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | =A3+$B$3 |

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | h= 0,5 | |
| 2 | Xi | Yi |
| 3 | -3 | 0,015625 |
| 4 | -2,5 | 0,03125 |
| 5 | -2 | 0,0625 |
| 6 | -1,5 | 0,125 |
| 7 | -1 | 0,25 |
| 8 | -0,5 | 0,5 |
| 9 | 0 | 1 |
| 10 | 0,5 | 1,5 |
| 11 | 1 | 2,25 |
| 12 | 1,5 | 3,375 |
| 13 | 2 | 5,0625 |
| 14 | 2,5 | 7,59375 |
| 15 | 3 | 11,390625 |




## خواص الدالة $f$

1. نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x) \times f(-x)$

أ) بين أن $h$ دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f(x) \times f(-x) = 1$

ب) برهن بالخلف أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f(x) \neq 0$

2. نفرض أنه توجد دالة ثانية $g$ تحقق $g' = g$ و $g(0) = 1$. بما أن الدالة $f$ لاتنعدم على $\mathbb{R}$ نعتبر الدالة $k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

أ) بين أن $k$ دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $g(x) = f(x)$

3. ليكن $y$ عدد حقيقي ثابت . نعتبر الدالة $l$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $l(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

أ) بين أن $l$ دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $l(x) = f(y)$ .

ب) استنتج أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل $y$ من $\mathbb{R}$، $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

ج) استنتج أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل $y$ من $\mathbb{R}$، $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$

4. ليكن $n$ عددا صحيحا نسبيا و لتكن $\varphi$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\varphi(x) = \frac{f(nx)}{[f(x)]}$

أ) عين الدالة المشتقة للدالة $\varphi$

ب) استنتج أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f(nx) = [f(x)]^n$

# تعاريف و خواص الدالة الأسية

## وُجود الدالة الأسية

**مبرهنة**

توجد دالة وحيدة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث، من أجل كل عدد حقيقي $x$،

$$f'(x) = f(x) \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

هذه الدالة يُرمز لها بالرمز $x \mapsto \exp(x)$ و تُسمّى الدالة الأسية

نقبل دون برهان وُجود الدالة الأسية

**خاصية** : الدالة الأسية لا تنعدم في $\mathbb{R}$، أي من أجل كل عدد حقيقي $x$، $\exp(x) \neq 0$

**البرهان** : لتكن الدالة $\varphi$ المعرفة بـ : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$

لنثبت أنّ الدالة $\varphi$ ثابتة، لذلك مشتق $\varphi$ هي الدالة المعرفة بـ :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

و بما أنّ $f' = f$ فإنّ :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x)f'(-x) - f(x)f'(-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

$\varphi' = 0$ إذن الدالة $\varphi$ ثابتة، و منه من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$\varphi(x) = \varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1$$

نستنتج إذن : $f(x)f(-x) = 1$ ، و عليه الدالة $f$ لا تنعدم في $\mathbb{R}$

النتيجة : من أجل كل عدد حقيقي $x$ $\exp(x) \neq 0$

**خاصية** : الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$، أي من أجل كل عدد حقيقي $x$ $\exp(x) > 0$

**البرهان** : نعلم أنّ

- من أجل كل عدد حقيقي $x$ $\exp(x) \neq 0$
- $\exp(0) = 1 > 0$
- الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن، إذا وُجد عدد حقيقي $a$ حيث $\exp(a) < 0$ فإنّه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يُوجد عدد حقيقي $c$ حيث $\exp(c) = 0$ و هذا يُناقض أنّ الدالة exp لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

النتيجة : الدالة exp موجبة تماما على $\mathbb{R}$

## النتائج

الدالة الأسية التي يُرمز لها exp

- معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- $\exp(0) = 1$
- من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $\exp(x) > 0$
- الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\exp'(x) = \exp(x)$

## العلاقة الأساسية

**مبرهنة**

من أجل كل عددين حقيقيين $x$ و $y$، $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

البرهان

نعتبر الدالة $h$ المعرفة بـ : $h(x)=\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$

و لنثبت أنّ الدالة $h$ ما هي إلاّ الدالة الأسية. يكفي إذن أن نبرهن أن $h'=h$ و $h(0)=1$:

$$h'(x)=\frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)}=\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}=h(x)$$
$$h(0)=\frac{\exp(0+a)}{\exp(a)}=1$$

الدالة $h$ هي إذن الدالة الأسية، و منه نستنتج

$\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}=\exp(x)$□ أي $\exp(x+a)=\exp(x)\times\exp(a)$

## خواص أخرى

**مبرهنة**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان و $n$ عدد طبيعي، لدينا الخواص التالية

- $\exp(-a)=\frac{1}{\exp(-a)}$
- $\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na)=[\exp(a)]^n$

## ترميز آخر للدالة الأسية

**تعريف** يُرمز إلى العدد الحقيقي $\exp(1)$ بالرمز e

العدد e هو العدد الحقيقي غير الناطق، ... $e\simeq 2{,}718$

نضع من أجل كل عدد حقيقي $x$، $e^x=\exp(x)$ و نحصل على الخواص التالية: من أجل كل عددان حقيقيان $a$ و $b$

- $e^{a+b}=e^a\times e^b$
- $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$
- $(e^x)^n=e^{nx}$

## تطبيقات

### تطبيق 1 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

1. لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$$
أثبت أنّ $f$ دالة ثابتة
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$،
$$e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$$
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $e^x+e^{-x}-2\geqslant 0$

### تطبيق 2 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{e^{2x}+2}{1-e^{2x}}$□

1. عيّن $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2. أثبت أنّه من أجل كل $x\in D_f$، لدينا: $f(x)=\frac{2e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$
3. أحسب، من أجل كل $x\in D_f$: $f(x)+f(-x)$ و فسر النتيجة بيانيا

# دراسة الدالة الأسية و نهايات التزايد المقارن

## اتجاه تغيّر الدالة الأسية

**مبرهنة** الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

لأنّ $\exp'(x) = \exp(x)$ ومن أجل كل عدد حقيقي $x$، $\exp(x) > 0$

### نتائج

- مهما يكن العدد الحقيقي $k$ الموجب تماما، المعادلة $e^x = k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.
- من أجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$:

$$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$
$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$$
$$a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$$

تنبيه
خاصية الدالة المتزايدة تماما ( الدالة المتزايدة تُحافظ على الترتيب )

## النهايات و التمثيل البياني

**تطبيق 3** نهاية الدالة الأسية عند $+\infty$

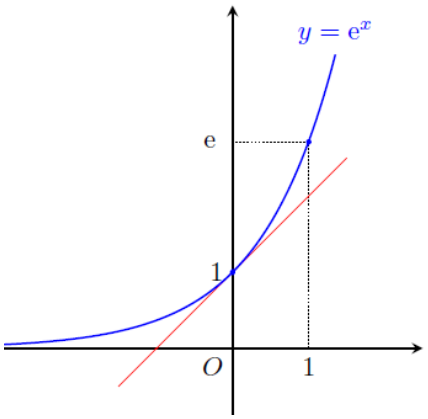
1. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - x$
   (أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها. ما هي أصغر قيمة للدالة $f$ ؟
   (ب) استنتج النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$
2. باستبدال المتغيّر، عيّن النهاية $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

**مبرهنة**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ▪

## جدول التغيرات و التمثيل البياني

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| exp | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $e$ ↗ | $+\infty$ |




محور الفواصل هو مقارب لمنحنى الدالة الأسية عند $-\infty$

### تطبيقات

**تطبيق 4** حل معادلات و متراجحات

في كل حالة، حل المعادلة أو المتراجحة المقترحة:

**(1)** $e^{5x} = 1$ **(2)** $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ **(3)** $2e^{-x} = \frac{1}{e^{x}+2}$ **(4)** $e^{x^2} = (e^2)^3 e^{-x}$

**(5)** $5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$ **(6)** $e^{x^2} \leqslant \frac{1}{e^2}$ **(7)** $3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0$ **(8)** $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$

## نهايات مهمة

**مبرهنة**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

**البرهان :**

عيّن العدد المشتق للدالة الأسية عند 0 و استنتج هذه النهاية

## التزايد المقارن ( مقارنة تزايد $e^x$ و $x$ )

**تطبيق 5** نهايات التزايد المقارن

3. نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$

(أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ ، $g(x)>0$

(ب) استنتج النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$

4. باستبدال المتغيّر، عيّن النهاية $\lim_{x\to-\infty}xe^x$

**مبرهنة**

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

و من أجل كل عدد طبيعي $n>0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

## مشتق الدالة $e^u$

**مبرهنة**

لتكن $u$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة $\exp\circ u$ ، التي يرمز لها $e^u$ ، هي كذلك قابلة للاشتقاق على I و من أجل كل عدد حقيقي من I ،

$$(e^u)'(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}$$

**البرهان :** (حسب مبرهنة مشتق مركب دالتين )

**تطبيق 6** حساب نهايات

أحسب النهايات المقترحة للدالة $f$

(1) $f(x)=x-e^x$ عند $+\infty$ ، عند $-\infty$

(2) $f(x)=\frac{2e^x+1}{e^x+1}$ عند $+\infty$ ، عند $-\infty$

(3) $f(x)=(1-5x)e^{-x}$ عند $+\infty$

(4) $f(x)=\frac{e^{-2x}}{2-e^{-x}}$ عند $+\infty$ ، عند $-\infty$

(5) $f(x)=2e^{2x}-e^x+1$ عند $+\infty$ ، عند $-\infty$

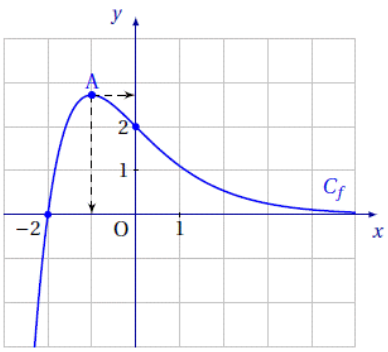
(6) $f(x)=e^x-xe^{-x}$ عند $+\infty$ ، عند $-\infty$

(7) $f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$ عند 0، عند $+\infty$ ، عند $-\infty$

(8) $f(x)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ عند $+\infty$ ، عند$-\infty$

**تطبيق 7 تعيين عبارة دالة**

التمثيل البياني هو لدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان




1. استعمل هذا الشكل لحساب العددين $a$ و $b$.
2. أحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$
و استنتج إحداثيات النقطة $A$ المناسبة للقيمة الحدية الكبرى للدالة $f$.

# المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

ملاحظة

يُؤدي العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الاقتصاد، الكهرباء و الميكانيك إلى دراسة هذا النوع من المعادلات التفاضلية و التي غالبا ما تكتب على الشكل : $\frac{dx}{dt} = at + b$

**تعريف**

حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $(a \neq 0)$ هو تعيين كل الدوال القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = af(x) + b$

## حل المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$

**مبرهنة**

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $(a \neq 0)$ هي الدوال $f_k$ المعرفة بـ: $f_k(x) = ke^{ax}$
حيث $k$ عدد حقيقي ثابت كيفي

**البرهان:**

نعتبر المعادلة التفاضلية: (E) $y' = ay$ مع $(a \neq 0)$

1. أثبت أنّ الدالة $f_k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = ke^{ax}$ حيث $k$ عدد حقيقي هي حل للمعادلة (E).
2. نفرض أن g حل آخر للمعادلة التفاضلية (E). أثبت أنّ الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = e^{-ax}g(x)$ دالة ثابتة. استنتج أنّ $g(x) = ke^{ax}$ حيث $k$ عدد حقيقي ثابت كيفي.

**تطبيق 8 حل معادلة تفاضلية**

حل، في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 0$

## حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$

**مبرهنة**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان مع $a \neq 0$
الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال $f_k$ المعرفة بـ $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $k$ عدد حقيقي ثابت كيفي.

**البرهان:**

نعتبر المعادلة التفاضلية: (E') $y' = ay + b$ مع $(a \neq 0)$

1. أثبت أنّ الدالة $f_k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي كيفي هي حل للمعادلة (E').
2. نفرض أن $g$ حل آخر للمعادلة (E') و لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = g(x) + \frac{b}{a}$
أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $h'(x) = ah(x)$

3. استنتج من مبرهنة الجزء الأول عبارة $h(x)$ و من ثمّ عبارة $g(x)$.

**تطبيق 9 حل معادلة تفاضلية**

حل، في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 3$

**خاصية :**

من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0; y_0)$، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ ( مع $a \neq 0$ ) تقبل، على $\mathbb{R}$، حلا وحيدا $f$ حيث: $f(x_0) = y_0$

**تطبيق 10 حل معادلة تفاضلية**

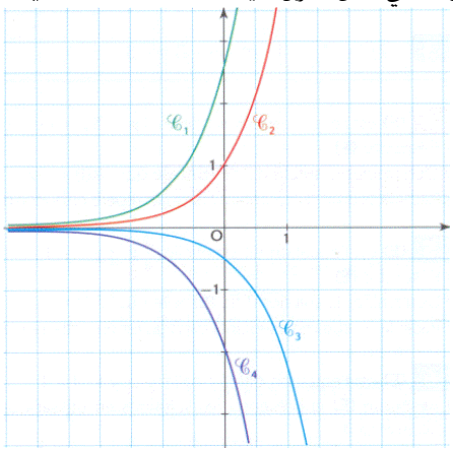
نعتبر المعادلة التفاضلية (E) $2y' + 3y = 0$

1. حل المعادلة (E)
2. عيّن الحل $f$ للمعادلة (E) بحيث $f(1) = 2$

أدرس تغيّرات الدالة $f$ ثمّ أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

**تطبيق 11 حل معادلة تفاضلية**

المنحنيات الأربعة الممثلة في الشكل التالي تُمثل حلول، في $\mathbb{R}$، للمعادلة التفاضلية: $\frac{1}{2}y' - \frac{3}{4}y = 0$




1. حل، في $\mathbb{R}$، هذه المعادلة.
2. عيّن معادلة لكل من المنحنيات $\mathcal{C}_1$، $\mathcal{C}_2$، $\mathcal{C}_3$، $\mathcal{C}_4$

**تطبيق 12 حل معادلة تفاضلية**

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) $y' + 2y = 1$

1. حل المعادلة (E).
2. عيّن الحل $f$ للمعادلة (E) بحيث $f(-1) = 2$
3. أدرس تغيّرات الدالة $f$ ثمّ أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

# أعمال موّجهة

## الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $\lambda$، نعتبر الدوال $f_\lambda$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_\lambda = e^{-\lambda x}$$

نرمز بـ $(\mathcal{C}_\lambda)$ إلى المنحنيات الممثلة للدوال $f_\lambda$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب نهايتي الدالة $f_\lambda$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغيّر الدوال $f_\lambda$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
3. بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_\lambda)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات $(\mathcal{C}_1)$، $(\mathcal{C}_2)$ و $(\mathcal{C}_3)$.
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_\lambda)$ و $(\mathcal{C}_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين $\lambda$ و $\lambda'$ حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

## الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $\lambda$، نعتبر الدوال $g_\lambda$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

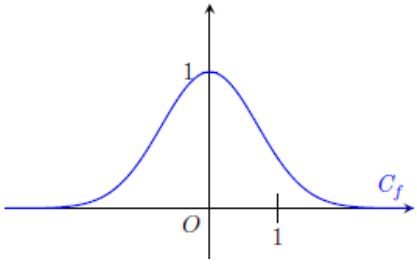
$$g_\lambda = e^{-\lambda x^2}$$

نرمز بـ $(\mathcal{E}_\lambda)$ إلى المنحنيات الممثلة للدوال $g_\lambda$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب نهايتي الدالة $g_\lambda$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغيّر الدوال $g_\lambda$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
3. بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{E}_\lambda)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات $(\mathcal{E}_1)$، $(\mathcal{E}_2)$ و $(\mathcal{E}_3)$.
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{E}_\lambda)$ و $(\mathcal{E}_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين $\lambda$ و $\lambda'$ حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

**ملاحظة**: تسمى المنحنيات $(\mathcal{E}_\lambda)$ بمنحنيات غوص (Gauss)

و يتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء و لعل أكثرها استعمالا هو المنحني $(\mathcal{E}_{0,5})$ ذو المعالة $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ و الذي يأخذ شكلا ناقوسيا.



كارل فريدرش غاوس (Carl Friedrich GAUSS) (1777-1855). ولد في مدينة برونشفايغ (Brunswick) (ألمانيا). كان غاوس معروفاً لأبحاثه المتميزة في حقول الرياضيات والفيزياء وعلم الفلك وعلم قياسات الأرض وعلم فيزياء الأرض، ومازال يعود له الفضل الكبير في عدد من المجالات العلمية في وقتنا الحاضر

# تمارين و مسائل للتعمق

**01** لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال بما يلي

$$f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$$

**1. دراسة دالة مساعدة**

أ) لتكن الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي

$$g(x)=x^2\mathrm{e}^x-1$$

أدرس اتجاه تغيّر الدالة $g$

ب) أثبت أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$ حيث $g(\alpha)=0$. تحقق أنّ $\alpha$ ينتمي إلى المجال $]0{,}703;0{,}704[$

ج) عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

**2. دراسة الدالة $f$**

أ) عيّن نهايات الدالة $f$ عند $0$ و عند $+\infty$

ب) $f'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$

أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ج) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ و شكل جدول تغيّراتها على المجال $]0;+\infty[$

د) أثبت أنّ العدد $m=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}$ هو قيمة صغرى للدالة $f$

ه) برّر أنّ $3{,}43<\alpha<3{,}45$

**02** **الجزء الأول : دراسة دالة مساعدة**

لتكن $\varphi$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\varphi(x)=(x^2+x+1)\mathrm{e}^{-x}-1$$

**1.** أ) عيّن نهايات الدالة $\varphi$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

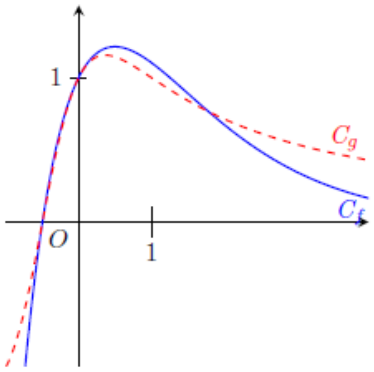
ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $\varphi$ و شكل جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$

**2.** أثبت أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$، أحدهما $\alpha$ ينتمي إلى المجال $]1{,}79;1{,}80[$

**3.** استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$

**الجزء الثاني : الوضعية النسبية لمنحنيين**

مثلنا على الشكل التالي $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ المنحنيين الممثلين لدالتين $f$ و $g$




$f$ و $g$ هما الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

**1.** أثبت أنّ المنحنيين يشملان النقطة $A$ ذات الإحداثيات $(0;1)$ وأنّ لهما في هذه النقطة نفس المماس

**2.** أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$،

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

$\varphi$ هي الدالة المعرفة في الجزء الأول

ب) بيّن، في جدول، إشارة $f(x)-g(x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$

ج) استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$

**03** $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=x-\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

**1.** أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$:

$$f(x)=x-1+\frac{2}{\mathrm{e}^x+1} \quad \text{و} \quad f(x)=x+1-\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$$

ب) أدرس نهايات الدالة عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

ج) أثبت أن المستقيم $\Delta_1$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$ و أن المستقيم $\Delta_2$ ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$

د) حدّد وضعيات المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيمين $\Delta_1$ و $\Delta_2$.

**2.** أ) أثبت أنّ الدالة $f$ فردية.

ب) أدرس تغيّرات الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$

**3.** أنشئ $\Delta_1$ ، $\Delta_2$، المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $x=0$، ثمّ $(\mathcal{C}_f)$.

**4.** أثبت أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا واحدا $\alpha$. عيّن حصرا للعدد $\alpha$ إلى $10^{-1}$ بالتقريب.

**04** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+(1-x)\mathrm{e}^{2x})$$

ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ( وحدة الرسم 2 cm )

**1.** أ) عيّن نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

ب) أثبت أنّ المستقيم $\Delta$ ذو المعادلة $y=\frac{x}{2}$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$.

أدرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\Delta$

**2.** برّر أنّ الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب $f'(x)$

**3.** نعتبر الدالة $u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $u(x)=1+(1-2x)\mathrm{e}^{2x}$

أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $u$

ب) أثبت أنّ المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0{,}63<\alpha<0{,}64$

ج) استنتج إشارة $u(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$

**4.** أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها

**5.** أنشئ المستقيم $\Delta$ و المنحنى $\mathcal{C}$

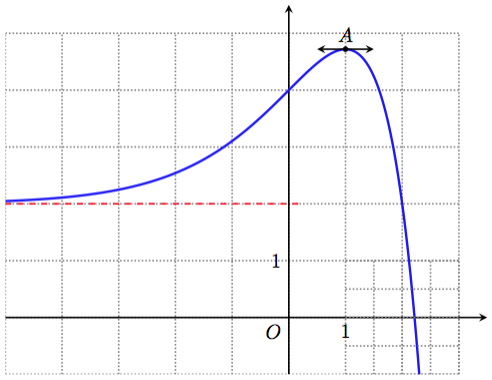
**05** **الجزء الأول**

$a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية و $h$ هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x)=(ax+b)\mathrm{e}^x+c$$

**1.** أكتب عبارة $h'(x)$ بدلالة $a$ و $b$ حيث $h'$ هي الدالة المشتقة للدالة $h$.

**2.** الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة $h$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$




- النقطة $B(0;4)$ تنتمي إلى المنحني
- المماس للمنحني عند النقطة $A$ ذات الفاصلة 1 هو موازي لحامل محور الفواصل
- المستقيم ذو المعادلة $y=2$ هو مُقارب للمنحني عند $(-\infty)$

من خلال هذه المعطيات بيّن أنّ :

$$h(x)=(-x+2)\mathrm{e}^x+2$$

3. بقراءة بيانية:

(أ) عيّن حصراً للعدد $\alpha$ الذي يُحقق $h(\alpha)=0$

(ب) إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$

## الجزء الثاني

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x+1}$$

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
2. تأكد أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=\frac{x\,h(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$
3. شكل جدول تغيّرات الدالة $f$
4. بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha(\alpha-2)$ ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$
5. أنشئ المنحني $\mathcal{C}$

## 06

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+1}$$

ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

(وحدة الرسم: 2 cm بالنسبة إلى محور الفواصل و 5 cm بالنسبة إلى محور التراتيب)

الجزء الأول: **أسئلة تمهيدية**

1. لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x\mathrm{e}^x+1$

(أ) أدرس تغيّرات الدالة $h$

(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $h(x)>0$

2. لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x+2-\mathrm{e}^x$

(أ) عيّن نهايات الدالة $g$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(ب) أدرس تغيّرات الدالة $g$ و شكل جدول تغيّراتها

(جـ) أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين على $\mathbb{R}$. ليكن $\alpha$ و $\beta$ هذين الحلين مع $\alpha>\beta$. أثبت أنّ $1{,}14<\alpha<1{,}15$

(د) حدّد، حسب قيم العدد الحقيقي $x$، إشارة $g(x)$

## الجزء الثاني: دراسة الدالة و إنشاء تمثيلها الباني

1. عيّن نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر، هندسيا، هذه النتائج.
2. (أ) أثبت، أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. (أ) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha}$

(ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4. عيّن معادلة للمماس $d$ للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.
5. (أ) أثبت، أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$:

$$f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{x\mathrm{e}^x+1}$$

مع $u(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1$

(ب) أدرس تغيّرات الدالة $u$. استنتج إشارة $u$

(جـ) استنتج وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى المماس $d$.

6. **أنشئ** المستقيم $d$ و المنحني $\mathcal{C}$. (يُعطى $-1{,}85<\beta<-1{,}84$ و $-1{,}19<f(\beta)<-1{,}18$)

## 07

1. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(2x^3-4x^2)\mathrm{e}^{-x}$

و ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

(أ) أحسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$

(ب) أحسب $f'(x)$ و تحقق أنّ : $f'(x)=2x(-x^2+5x-4)\mathrm{e}^{-x}$

(جـ) شكل جدول تغيّرات الدالة $f$

(د) أرسم المنحني $(\mathcal{C}_f)$

2. لتكن $u$ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

نُعرف الدالة $v$ على المجال $]0;+\infty[$ بـ $v(x)=u\left(\frac{1}{x}\right)$

(أ) نفرض أنّ $u$ متزايدة تماما على المجال $[a;b]$ حيث $(0<a<b)$

عيّن اتجاه تغيّر الدالة $v$ على المجال $\left[\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right]$

(ب) نُعرف على $]0;+\infty[$ الدالة $g$ بـ $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$، حيث $f$ هي الدالة المعرفة في السؤال 1

عيّن نهايات الدالة $g$ عند 0 و عند $+\infty$

(جـ) استنتج من الأسئلة السابقة جدول تغيّرات الدالة $g$ على المجال $]0;+\infty[$

## 08 الجزء الأول : حل معادلة تفاضلية

نعتبر المعادلة التفاضلية

$$y'-2y=x\mathrm{e}^x \qquad (1)$$

1. حل المعادلة التفاضلية

$$y'-2y=0 \qquad (2)$$

حيث $y$ هي دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

2. $a$ و $b$ عددان حقيقيان و $u$ هي الدالة المعرفة على بـ

$$u(x)=(ax+b)\mathrm{e}^x$$

أ) عيّن $a$ و $b$ حتى تكون $u$ حلاً للمعادلة (1)

ب) أثبت أنّ $v$ هي حلاً للمعادلة (2) إذا و فقط إذا كانت الدالة $u+v$ حلا للمعادلة(2)

ج) استنتج حلول المعادلة (1) التي تنعدم عند0

**الجزء الثاني : دراسة دالة مساعدة**

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. عيّن نهايات الدالة $g$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$
2. أدرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ و شكل جدول تغيّراتها
3. أثبت أنّ المعادلة $g = 0$ تقبل حلين حقيقيين
   أ) تحقق أنّ 0 هو أحد هذين الحلين
   ب) $\alpha$ هو الحل الآخر. أثبت أنّ $-1{,}5 \leq \alpha \leq -1{,}6$
4. عيّن، حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$

**الجزء الثالث : دراسة دالة**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على بما يلي

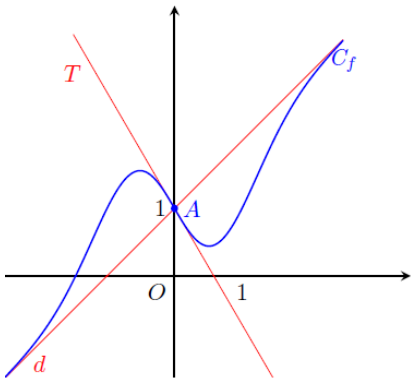
$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$$

1. عيّن نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$
2. أحسب $f'(x)$ و بيّن أنّ $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة. استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$
3. أثبت أنّ $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ حيث $\alpha$ هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء الأول. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
4. شكل جدول تغيّرات الدالة $f$
5. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس
   ( وحدة الرسم : 2cm)

**09** على الشكل في الأسفل مثلنا

- في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، المنحني $\mathcal{C}_f$ الممثل لدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- المستقيم المقارب المائل $d$ للمنحني $\mathcal{C}_f$
- المماس $T$ للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0

نعلم أنّ النقطة $A(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$. المستقيم المقارب $d$ يشمل النقطتين $(0;-1)$ و $A$ و أنّ للمماس $T$ المعادلة : $y = (1-e)x + 1$




**الجزء الأول : عبارة $f(x)$**

1. عيّن معادلة للمستقيم $d$
2. نفرض وُجود عددان حقيقيان $m$ و $p$ و دالة $\varphi$ معرفة على $\mathbb{R}$ حيث :
   $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$
   أ) عيّن $m$ و $p$.
   ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f(x) + f(-x) = 2$
   ج) استنتج أنّ الدالة $\varphi$ فردية ثمّ أنّ الدالة $f'$ مشتق الدالة $f$ هي دالة زوجية
3. نفرض أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان. أثبت، باستعمال معطيات و نتائج السؤال الأول أنّ $a = -e$ و $b = 0$

**الجزء الثاني : دراسة الدالة**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 1 + x - xe^{1-x^2}$
و $\mathcal{C}$ هو تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أ) تحقق أنّ T هو بالفعل المماس للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة A.
   ب) أدرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى T
2. **يُبيّن** المنحني وُجود قيمة حدّية محلية صغرى للدالة $f$ على المجال $[0;1]$.
   أ) أثبت أنّ إشارة $f''(x)$ هي إشارة $6x - 4x^3$.
   ب) أثبت أنّ المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $[0;1]$ و أنّ $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.
   ج) أكتب $f(\alpha)$ على شكل كسر لكثيري حدود للعدد $\alpha$. حدّد عندئذ هذه القيمة الحدّية المحلية.

**10** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**الجزء الأول : دراسة الدالة $f$ على $]0;+\infty[$**

1. عيّن نهايات الدالة $f$ عند أطراف المجال $]0;+\infty[$.
2. أ) تحقق أنّه من أجل كل $x > 0$:
$$f(x) - x - 1 = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1$$
   ب) استنتج نهاية $f(x) - x - 1$ عند $+\infty$، و برهن أن المستقيم $\Delta$ ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$. نقبل أنّه من أجل كل $x > 0$، $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق $\Delta$.
3. ادرس تغيّرات الدالة $f$ على $]0;+\infty[$ و شكل جدول تغيّراتها.

**الجزء الثاني : دراسة الدالة $f$ على $]-\infty;-[$.**

1. عيّن نهايات الدالة عند أطراف المجال $]-\infty;0[$.
2. بنفس طريقة الجزء الأول، نُثبت أن المستقيم $\Delta$ ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ و نقبل أنّه من أجل كل $x < 0$، $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت $\Delta$.
3. $g$ هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0]$ كما يلي:
   $g(x) = f(x)$ إذا كان $x < 0$ و $g(0) = 0$
   أ) عيّن:
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$
   ب) استنتج أن الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند 0.
   ج) أدرس تغيّرات الدالة $g$ على المجال $]-\infty;0]$ و شكل جدول تغيّراتها.
   د) أنشئ المنحني $(\mathcal{C}_f)$.

## حل تمارين و إرشادات

...