2014

الدرس الخامس

# الهندسة في الفضاء

إعداد : الأستاذ ك. حامدي

5

ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة

# 5

في هذا المحور



## الجداء السلّمي في المستوي (تذكير)

### العبارات الأربعة للجداء السلمي (تذكير)

1. الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ المعرف بـ :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]$$

أو المعرف بـ : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$

**حالة خاصة**: $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

**ملاحظة**: إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فإنّ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

**تنبيه**

من أجل $A$ و $B$ نقطتان كيفيتان من المستوي: $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2$

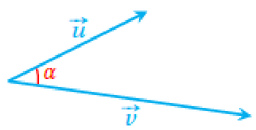
2. في معلم متعامد و متجانس

إذا كانت $(x;y)$ و $(x';y')$ هي مركبات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على الترتيب فإنّ

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

3. بدلالة الزاوية $(\vec{u};\vec{v})$

إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين و $\alpha$ هو قيس الزاوية الهندسية المرفقة بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإنّ




$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha$$

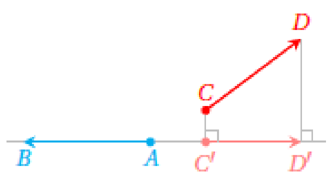
**تذكير**

$\cos(\vec{u};\vec{v})=\cos(\vec{v};\vec{u})=\cos\alpha$ حيث $\alpha$ هو قيس بالراديان للزاوية المعرفة بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

**حالات خاصة**:

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الاتجاه فإنّ: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما اتجاهان متعاكسان فإنّ: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان فإنّ : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

4. إذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ هو المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم $(AB)$ ، فإنّ :




$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$

## معادلة مستقيم و معادلة دائرة في المستوي ( تذكير )

1. إذا كان $n\binom{a}{b}$ شعاع ناظمي لمستقيم $d$ ، فإنّ لهذا المستقيم معادلة من الشكل
$$ax + by + c = 0$$
و عكسيا ، إذا كان $a$ و $b$ غير معدومين معا فإنّ المعادلة $ax + by + c = 0$ هي معادلة مستقيم حيث الشعاع $\binom{a}{b}$ هو ناظمي له

2. الدائرة ذات المركز $A(a; b)$ و نصف القطر $r$ هي مجموعة النقط $M$ حيث $AM = r$
معادلة لهذه الدائرة هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
الدائرة ذات القطر $[AB]$ هي مجموعة النقط $M$ حيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

## المسافة بين نقطة و مستقيم ( تذكير )

**مبرهنة**

في معلم متعامد و متجانس، المسافة بين النقطة $A$ ذات الإحداثيات $(x_A; y_A)$ و المستقيم $d$ ذو المعادلة $ax + by + c = 0$ تساوي :
$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\square$$

**البرهان**

...

## تطبيقات

### تطبيق 1 استعمال خواص الجداء السلمي

$ABCD$ مربع طول ضلعه $a$. $I$ و $J$ هما النقطتان حيث $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$
أثبت أنّ المستقيمين $(AI)$ و $(BJ)$ متعامدان

**تنبيه**

**الطريقة** : لإثبات أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان، يُمكن أن نبرهن أن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

### تطبيق 2 استعمال العبارات المختلفة للجداء السلمي

في معلم متعامد و متجانس للمستوي،
نعتبر النقط $A(1\,;1)$ ، $B(-1\,;2)$ ، و $C(-3\,;0)$. النقطة $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(BC)$.

1. أحسب بالتقريب إلى الدرجة قيس الزاوية $\widehat{ABC}$
2. أحسب الطول $BH$.

# الجداء السلّمي في الفضاء

## التعريف

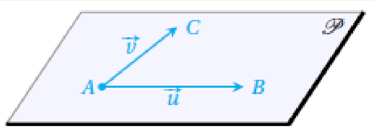
**تعريف**

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء

$A$، $B$، $C$ هي ثلاث نقط من الفضاء حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو $\mathcal{P}$ يشمل النقط $A$، $B$ و $C$

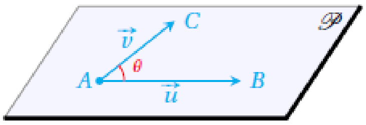
الجداء السلمي في الفضاء للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ في المستوي $\mathcal{P}$




## العبارات المختلفة للجداء السلمي

1. $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هما شعاعان غير معدومين

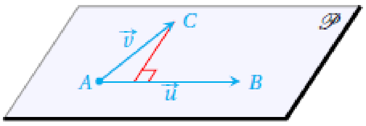
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos\theta$$




2. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

و $H$ هو المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$




3. في معلم متعامد و متجانس.

إذا كانت $(x; y; z)$ و $(x'; y'; z')$ هي مركبات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على الترتيب

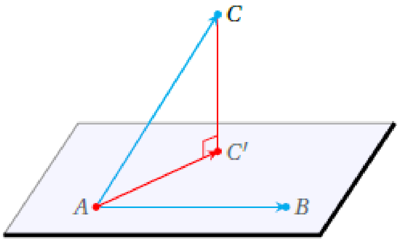
فإنّ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

4. الإسقاط العمودي على مستو

لا يتغيّر الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ باستبدال الشعاع $\overrightarrow{AC}$ بمسقطه العمودي على مستو يشمل المستقيم $(AB)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$$




## قواعد الحساب

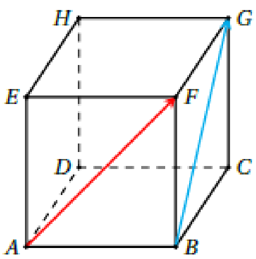
من أجل الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقي $k$:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

### مثال

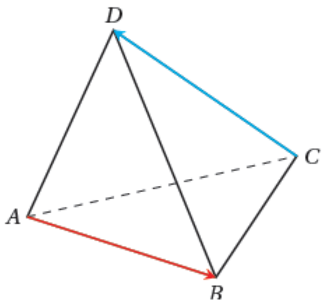
نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ الذي ضلعه $a$

أحسب: $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$



## تطبيقات

### تطبيق 3 حساب الجداء السلمي بدون معلم



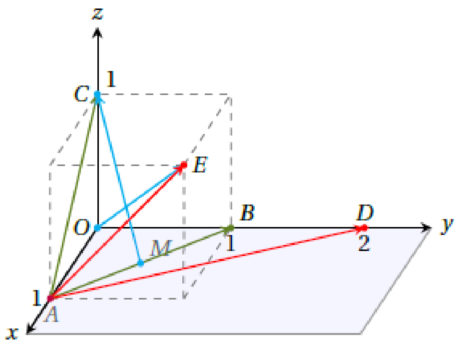

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم حرفه $a$:
كل وجه هو مثلث متقايس الأضلاع، طول ضلعه $a$.
أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

### تطبيق 4 حساب الجداء السلمي بدون معلم

$SABCD$ هرم قاعدته المربع $ABCD$ و رأسه $S$، لكل حروفه الطول $a$.
أحسب بدلالة $a$، الجداءات السلمية : $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}$

### تطبيق 5 حساب الجداء السلمي في معلم متعامد و متجانس

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط : $A(1;0;0)$ ، $B(0;1;0)$ ، $C(0;0;1)$ ، $D(0;2;0)$ و $E(1;1;1)$
النقطة $M$ هي منتصف القطعة $[AB]$.
أحسب: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CM}$




# التعامد في الفضاء

## الأشعة المتعامدة

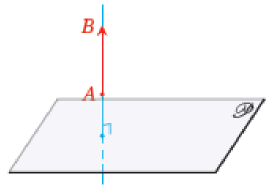
**تعريف**

في الفضاء، القول أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنّه إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ فإنّ المستقيمين $(AB)$ و $(CD)$ متعامدان

**مبرهنة**

1. القول أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يُكافئ القول أنّ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
2. إذن، في معلم متعامد و متجانس، الشعاعان $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متعامدين يعني أنّ $xx'+yy'+zz'=0$

## الشعاع الناظمي لمستو

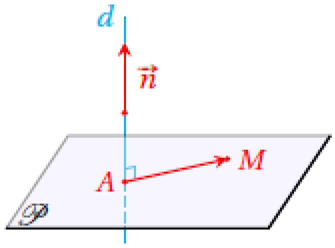



بالتعريف القول أنّ الشعاع غير المعدوم $\vec{}$ هو ناظمي للمستوي $\mathcal{P}$ يعني أنّ المستقيم $(AB)$ هو عمودي على المستوي $\mathcal{P}$

**تعريف**

الشعاع الناظمي لمستو $\mathcal{P}$ هو شعاع $\vec{n}$ غير معدوم منحاه عمودي على المستوي $\mathcal{P}$

### خاصية



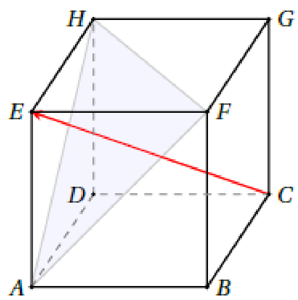

$\mathcal{P}$ مستوي، $A$ نقطة من هذا المستوي و $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي $\mathcal{P}$

المستوي $\mathcal{P}$ هو مجموعة النقط من الفضاء حيث

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

## تطبيقات

### تمرين محلول 6 اثبات أنّ مستقيم عمودي على مستو




$ABCDEFGH$ مكعب. أثبت أنّ الشعاع $\overrightarrow{CE}$ عمودي على المستوي $(AFH)$

**الطريقة**

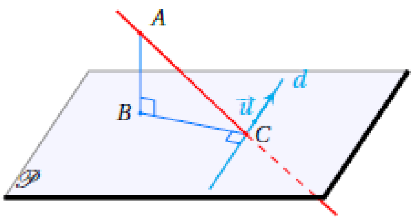
لإثبات أنّ مستقيما عمودي على مستو ، يكفي أنّ نثبت بأنّ هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين من المستوي

**الحل**

- $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF}$ لأنّ $B$ هو المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستوي $(ABF)$. الوجه $ABFE$ هو مُربع، إذن $(BE)$ و $(AE)$ متعامدان و منه $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ أي الشعاعان $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{AF}$ متعامدان
- كذلك $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{FH}$ لأنّ $G$ هو المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستوي $(EFG)$. الوجه $EFGH$ هو مُربع، إذن $(FH)$ و $(GE)$ متعامدان و منه $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$ أي الشعاعان $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{FH}$ متعامدان

النتيجة : الشعاع $\overrightarrow{CE}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{FH}$ غير المرتبطين خطيا فهو عمودي على المستوي $(AFH)$

### تمرين محلول 7 اثبات تعامد مستقيمين




$d$ مستقيم محتوى في المستوي $\mathcal{P}$

$A$ نقطة لا تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$ و $B$ مسقطها العمودي على $\mathcal{P}$

و $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستقيم $d$

أثبت أنّ المستقيمين $(AC)$ و $d$ متعامدان

**الحل**

ليكن $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم $d$. لنثبت أنّ $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 0$

الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AC}$ على المستوي $\mathcal{P}$، إذن $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0$ بمعنى $(AC)$ و $d$ متعامدان

# المعادلة الديكارتية لمستو

## المعادلة الديكارتية لمستو

تنبيه
هذه المعادلة الديكارتية ليست وحيدة

**مبرهنة**

في معلم متعامد و متجانس:

1. كل مستو $\mathcal{P}$ حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل: $ax+by+cz+d=0$
2. و عكسيا، إذا كان $a$، $b$، $c$ و $d$ أعداد حقيقية معلومة حيث $a$، $b$ و $c$ غير معدومة معا فإن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $ax+by+cz+d=0$ هي مستو و $\vec{n}(a;b;c)$ هو شعاع ناظمي له.

**البرهان**

...

**مثال** في معلم متعامد و متجانس، عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة $A(2;1;-3)$ و حيث $\vec{n}(1;1;2)$ شعاع ناظمي له.

## المسافة بين نقطة و مستو

$\mathcal{P}$ هو مستوي و $A$ نقطة من الفضاء. بُعد النقطة $A$ عن المستوي $\mathcal{P}$ هي المسافة $AH$ حيث $H$ هو المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $\mathcal{P}$

**مبرهنة**

في معلم متعامد و متجانس، $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$

المسافة بين A و $\mathcal{P}$ هي

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\square$$

**البرهان**

نحسب $AH$ حيث $H(x_H;y_H;z_H)$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على $\mathcal{P}$

$\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}(a;b;c)$ هما مرتبطان خطيا و عليه يوجد عدد حقيقي $\lambda$ حيث $\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{n}$ و نستنتج $x_H=\lambda a+x_a$، $y_A=\lambda b+y_A$ و $z_A=\lambda c+z_A$

النقطة $H$ تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$ فإحداثياها تُحقق إذن المعادلة الديكارتية له أي $ax_H+by_H+cz_H+d=0$ فنحصل على $\lambda=-\frac{ax_A+by_A+cz_A+d}{a^2+b^2+c^2}$ بعد تعويض $x_H$، $y_H$ و $z_H$

و منه

$$AH=\|\lambda\vec{n}\|=|\lambda|\|\vec{n}\|=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

## تطبيقات

**تطبيق 8 تعيين معادلة ديكارتية لمستو**

1. عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة $A(3;-2;2)$ و الموازي للمستوي ذو المعادلة $3x+2y-z+5=0$
2. عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ مع: $A(-1;3;2)$ ، $B(-4;0;1)$ و $C(1;2;-1)$

**تطبيق 9 حساب المسافة بين بين نقطة و مستو**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

1. عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة $(1;1;1)$ و حيث الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي له
2. أحسب المسافة بين النقطة $A(1;-1;2)$ و المستوي $\mathcal{P}$
3. هل النقطة $H$ ذات الاحداثيات $(2;0;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $\mathcal{P}$ ؟

# التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

## التمثيل الوسيطي لمستقيم

$d$ هو مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و موّجه بالشعاع $\vec{u}(a;b;c)$

القول أنّ النقطة $M(x;y;z)$ تنتمي إلى المستقيم $d$ يعني وُجود عدد حقيقي $t$ حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ بمعنى

$$\begin{cases} x-x_A=at \\ y-y_A=bt \\ z-z_A=ct \end{cases}$$

و منه المبرهنة التالية :

**مبرهنة**

المستقيم $d$ الذي يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و الموّجه بالشعاع $\vec{u}(a;b;c)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث :

$$(S)\quad \begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})\square$$

**تنبيه**

نقول أنّ $(S)$ هي جملة معادلات وسيطية للمستقيم $d$. $t$ هو الوسيط و يُمكن استبداله بأي حرف آخر يختلف عن $x$، $y$ و $z$

**مثال**

إذا كان $A(3;1;4)$ و $B(2;7;1)$ فإنّ $\overrightarrow{AB}(-1;6;-3)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(AB)$ و لهذا المستقيم التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=6t+1 \\ z=-3t+4 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})\square$$

## تعيين المستقيم بجملة معادلتي مستويين

إذا كانت الجملة

$$(S)\quad \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

بحيث الشعاعين $\vec{n}(a;b;c)$ و $\vec{n'}(a';b';c')$ غير مرتبطين خطيا فإنّ هذه الجملة تُعيّن مستقيم $\Delta$ هو تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ ذواتا المعادلتين $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$

## تطبيقات

**تطبيق 10 تعيين تمثيلا وسيطيا لمستقيم**

نعتبر في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1;-2;3)$ و $B(0;0;1)$

1. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$
2. هل النقطتين $C(-3;6;-5)$ و $D(2;-5;5)$ تنتميان إلى هذا المستقيم ؟
3. عيّن تمثيلا وسيطيا لنصف المستقيم $[AB)$، و تمثيلا وسيطيا للقطعة المستقيمة $[AB]$

**تطبيق 11 الانتقال من جملة معادلتين إلى التمثيل الوسيطي**

1. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $d$ المعرف بالجملة

$$(S)\quad \begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ x+y-4z-6=0 \end{cases}$$

2. استنتج نقطة و شعاع توجيه لهذا المستقيم

# تقاطع مستويات ومستقيمات

## كيف يتم تعيين تقاطع مستويين ؟

$\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ مستويان من الفضاء معادلتاهما هي $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ على الترتيب

### ▪ هندسيا

ليكن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ شعاعان ناظميان للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ على الترتيب

1. إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطين خطيا فإنّ المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيان. لتحديد الوضعية بدقّة:

نُعيّن نقطة A من المستوي $\mathcal{P}_1$ :

(أ) إذا كان $A\in\mathcal{P}_2$ فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ منطبقان

(ب) إذا كان $A\notin\mathcal{P}_2$ فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيان تماما (أو منفصلان)

2. إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان و تقاطُعهما مستقيم.

لتعيين تمثيل وسيطي لهذا المستقيم: نحل الجملة التي تشمل معادلتي المستويين و نختار إحداثية من الإحداثيات كوسيط.

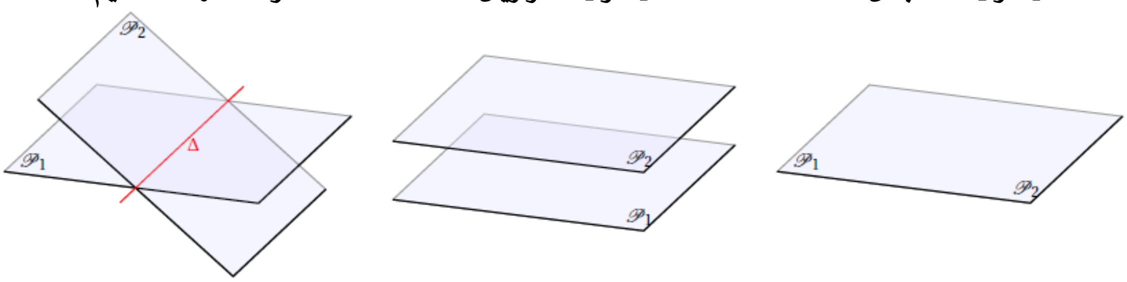
### ▪ جبريا

لدراسة تقاطع المستويين نحل الجملة

$$(S)\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & [1] \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & [2] \end{cases}$$

ملخص الوضعيات المختلفة للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و الإشارة إلى مجموعة حلول الجملة

**$\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ منطبقان** | **$\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيان** | **$\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان و تقاطعهما مستقيم $\Delta$**




$(S)$ تقبل عدد غير منته من الحلول مُمثلة بنقط $\mathcal{P}_1$ | $(S)$ ليس لها حل | $(S)$ تقبل عدد غير منته من الحلول مُمثلة بنقط $\Delta$

**تطبيق 12 تعيين تقاطع مستويين**

في معلم متعامد و متجانس، نعتبر المستويات $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ التي معادلاتها على الترتيب:

$x+3y-z+1=0$ ، $x+4y+z-3=0$ و $-x-3y+z+2=0$

أدرس الوضعية النسبية للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، ثم للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$

## كيف يتم تعيين تقاطع مستقيمين ؟

$\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ هما مستقيمان معرفان بالجملتين التاليتين : $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = \alpha' t + x'_0 \\ y = \beta' t + y'_0 \\ z = \gamma' t + z'_0 \end{cases}$ حيث $t$ و $k$ عددان حقيقيان

### ▪ هندسيا

ليكن $\overrightarrow{u_1}$ شعاع توجيه للمستقيم $\mathcal{D}_1$ و $\overrightarrow{u_2}$ شعاع توجيه للمستقيم $\mathcal{D}_2$

1. إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متوازيان. لتحديد الوضعية بدقّة:
   نُعيّن نقطة A من المستقيم $\mathcal{D}_1$:
   (أ) إذا كان $A \in \mathcal{D}_2$ فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ منطبقان
   (ب) إذا كان $A \notin \mathcal{D}_2$ فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متوازيان تماما (أو منفصلان)
2. إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ هما إمّا متقاطعان و إمّا ليسا من مستوٍ واحد.
   لتحديد الوضعية بدقّة: نفرض التقاطع، و في حالة الإجابة بالنفي فالمستقيمين ليسا من مستو واحد

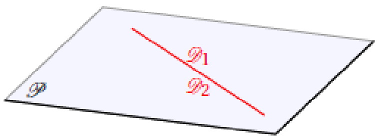
### ▪ جبريا

لدراسة تقاطع المستقيمين نحل جملة المعادلات :

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha t + x_0 = \alpha' t + x'_0 \\ y = \beta t + y_0 = \beta' t + y'_0 \\ z = \gamma t + z_0 = \gamma' t + z'_0 \end{cases}$$

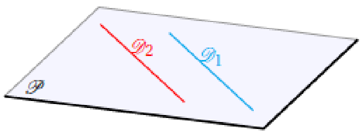
ملخص الوضعيات المختلفة للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و الإشارة إلى مجموعة حلول الجملة

**$\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ منطبقان**



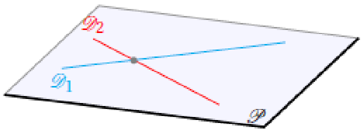

$(S)$ تقبل عدد غير منته
من الحلول مُمثلة بنقط $\mathcal{D}_1$

**$\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متوازيان تماما**



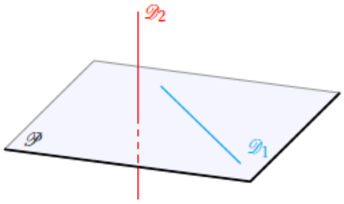

$(S)$ ليس لها حل

**$\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متقاطعان**




$(S)$ تقبل حلا وحيدا ممثلا بالنقطة $I$

**$\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ ليسا من نفس المستوي**




$(S)$ ليس لها حل

**تطبيق 13 تعيين تقاطع مستقيمين**

نعتبر المستقيمين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ الممثلين وسيطيا بما يلي $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ و $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -7 + 7k \\ y = 4 - 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$ مع $t$ و $k$ حقيقيان

أدرس تقاطع المستقيمين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$

## كيف يتم تعيين تقاطع مستقيم و مستو ؟

$\mathcal{P}$ هو المستوي المعرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$ و $\mathcal{D}$ هو المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases}$

### ▪ هندسيا

ليكن $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم $\mathcal{D}$ و $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي $\mathcal{P}$

1. إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متوازيان.

لتحديد الوضعية بدّقة: نُعيّن نقطة A من المستقيم $\mathcal{D}$:

(أ) إذا كان $A\in\mathcal{P}$ فإنّ $\mathcal{D}$ محتوى في $\mathcal{P}$

(ب) إذا كان $A\notin\mathcal{P}$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متوازيان تماما.

2. إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متقاطعان في نقطة.

لتعيين هذه النقطة: نُعوض، في معادلة المستوي $\mathcal{P}$ ، $x$، $y$ و $z$ بالإحداثيات الوسيطية للمستقيم $\mathcal{D}$، نحصل عندئذ على قيمة الوسيط التي تسمح بتعيين إحداثيات نقطة التقاطع.

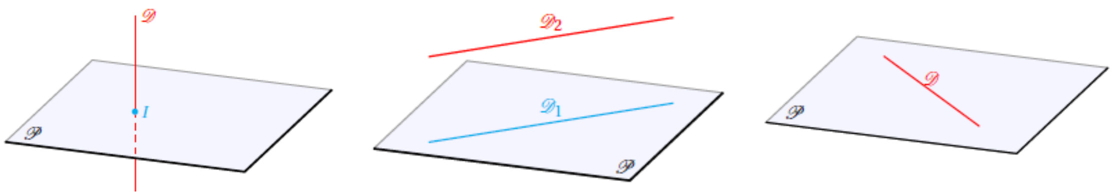
### ▪ جبريا

لدراسة تقاطع المستوي $\mathcal{P}$ و المستقيم $\mathcal{D}$ نحل جملة أربع معادلات :

$$(S)\quad \begin{cases} x=\alpha t+x_0 & [1] \\ y=\beta t+y_0 & [2] \\ z=\gamma t+z_0 & [3] \\ ax+by+cz+d=0 & [4] \end{cases}$$

ملخص الوضعيات المختلفة للمستوي $\mathcal{P}$ و المستقيم $\mathcal{D}$ و الإشارة إلى مجموعة حلول الجملة

**$\mathcal{D}$ محتوى في $\mathcal{P}$** | **$\mathcal{D}_2$ يوازي $\mathcal{P}$** | **$\mathcal{D}$ يقطع $\mathcal{P}$**




$(S)$ تقبل عدد غير منته من الحلول مُمثلة بنقط $\mathcal{D}$ | $(S)$ ليس لها حل | $(S)$ تقبل حل وحيد مُمثل بالنقطة I

### تطبيق 14 دراسة تقاطع مستقيم و مستو

ليكن المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $5x+y-z+3=0$ و المستقيم $\mathcal{D}$ الممثل وسيطيا بما يلي: $\begin{cases} x=t \\ y=1-6t \\ z=3-t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$.

أدرس تقاطع المستقيم $\mathcal{D}$ مع المستوي $\mathcal{P}$

### تطبيق 15 تعيين مسقط نقطة على مستو

نعتبر المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $x+2y+z-4=0$ و النقطة $A(1;0;-2)$

1. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}$ الذي يشمل A و عمودي على المستوي $\mathcal{P}$
2. استنتج إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $\mathcal{P}$

## كيف يتم تعيين تقاطع ثلاث مستويات ؟

$\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ ثلاث مستويات من الفضاء معادلاتها هي $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ، $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ و $a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$ على الترتيب

### ▪ هندسيا

1. إذا وُجد مستويين متوازيين تماما فإن $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\emptyset$
2. إذا كانت المستويات غير متوازية مثنى مثنى، نبحث عن $d$ مستقيم تقاطع المستويين $_1$ و $\mathcal{P}_2$:

(أ) إذا كان $d\subset\mathcal{P}_3$ فإنّ $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=d$.

(ب) إذا كان $d$ و $\mathcal{P}_3$ متقاطعان في نقطة A فإن $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\{A\}$

(جـ) إذا كان $d$ و $\mathcal{P}_3$ متوازيان تماما فإن $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\emptyset$

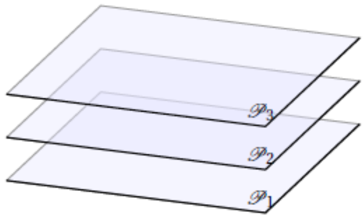
### ▪ جبريا

لدراسة تقاطع المستويات الثلاثة نحل الجملة

$$(S)\quad\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & [1]\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & [2]\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 & [3]\end{cases}$$

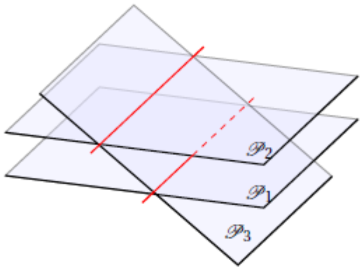
ملخص الوضعيات المختلفة للمستويات $\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ و الإشارة إلى مجموعة حلول الجملة

**المستويات الثلاثة متوازية تماما**



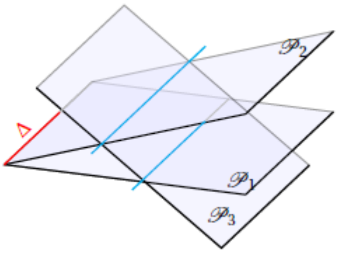

$(S)$ ليس لها حل

**مستويان متوازيان تماما و الثالث يقطعهما وفق مستقيمين**



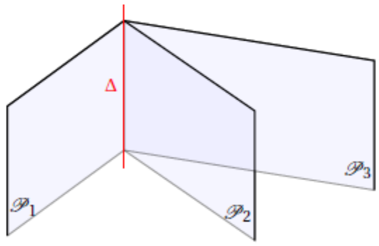

$(S)$ ليس لها حل

**مستويان متقاطعان وفق Δ و الثالث يُوازي تماما المستقيم Δ**



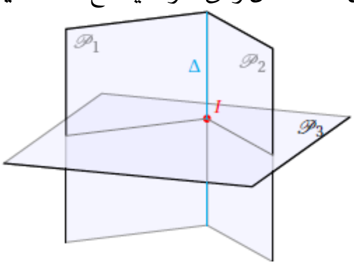

$(S)$ ليس لها حل

المستويات الثلاثة متقاطعة وفق المستقيم Δ




$(S)$ تقبل عدد غير منته من الحلول مُمثلة بنقط Δ

مستويان متقاطعان وفق Δ و Δ يقطع الثالث في نقطة $I$




$(S)$ تقبل حل وحيد مُمثل بالنقطة I

**تطبيق 16 تعيين تقاطع ثلاث مستويات**

عيّن تقاطع المستويات $\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ التي معادلاتها، بهذا الترتيب هي:

$4x+3y+z+2=0$ ، $x+2y+z-5=0$ و $3x+5y+2z-9=0$

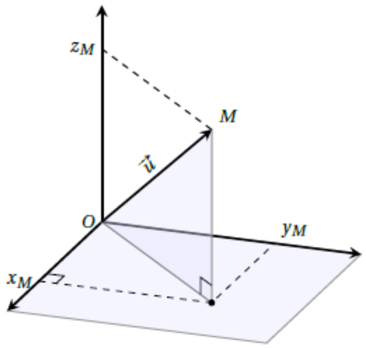
# ملحق

## التعليم في الفضاء

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلما للفضاء معناه أنّه إذا كان $\vec{\imath}=\overrightarrow{OI}$، $\vec{\jmath}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$ فإنّ النقط $O$، $I$، $J$ و $K$ ليست من نفس المستوي
كل نقطة $M$ من الفضاء هي إذن معرفة بـ :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\square$$

مع $x$، $y$ و $k$ أعداد حقيقية و الثلاثية $(x;y;z)$ تُسمى إحداثيات النقطة $M$ في المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$



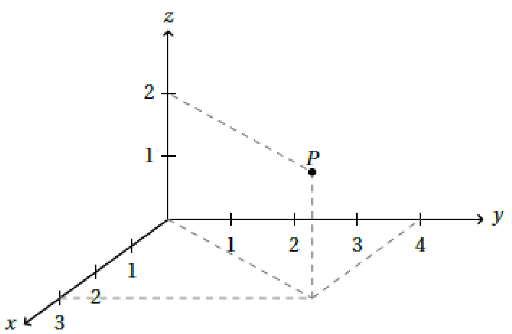

لدينا العلاقات التالية

- مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

( أو نكتب $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ )

- إذا كان $I$ هو منتصف $[AB]$ فإنّ : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- إذا كان $(a;b;c)$ هي مركبات الشعاع $\vec{u}$ فإنّ $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

**مثال** تمثيل النقطة $P(3;4;2)$ في معلم من الفضاء




### تطبيق 17 شرط انتماء أربعة نقط إلى مستو

لتكن النقط $A(2;0;1)$، $B(1;-2;1)$، $C(5;5;0)$ و $D(-3;-5;6)$

1. أثبت أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية
2. أثبت أنّ النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ هي من نفس المستوى

## التمثيل الوسيطي لمستو

**مبرهنة**

$\mathcal{P}$ مستوي يشمل نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ ، $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعان غير مرتبطين خطياً.
المستوى $\mathcal{P}$ هو مجموعة النقط من الفضاء حيث

$$\begin{cases}x=at+a'k+x_A\\y=bt+b'k+y_A\\z=ct+c'k+z_A\end{cases}$$

مع $t$ و $k$ عددان حقيقيان

**تطبيق 18 الانتقال من المعادلة الديكارتية إلى التمثيل الوسيطي**

$\mathcal{P}$ هو المستوي ذو المعادلة $x - y + 2z - 3 = 0$

عيّن تمثيلا وسيطيا لهذا المستوي

**تطبيق 19 الانتقال من التمثيل الوسيطي إلى المعادلة الديكارتية**

$\mathcal{P}$ هو المستوي المعرف بالجملة الوسيطية التالية

$$\begin{cases} x = t - k - 2 \\ y = 2t + k + 1 \\ z = -t + 3k - 1 \end{cases}$$

$t$ و $k$ عددان حقيقيان.

عيّن معادلة ديكارتية لهذا المستوي

## المرجح و مجموعات النقط

**مبرهنة و تعريف**: A، B و C ثلاث نقط من الفضاء، $\alpha$، $\beta$ و$\gamma$ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. توجد نقطة وحيدة G تحقق: $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ . هذه النقطة G تسمى مرجح جملة النقط المثقلة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$.

**مركز المسافات المتناسبة** $G$ لثلاث نقط $A$، $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة هو مركز ثقل المثلث $ABC$.

النقطة $G$ تحقق: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

### إحداثيات المرجح

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. لتكن النقط $A(x_A;y_A;z_A)$ ، $B(x_B;y_B;z_B)$ و $C(x_C;y_C;z_C)$.

إحداثيات المرجح G للجملة $\{(A;\alpha);(B;\alpha);(C;\gamma)\}$ هي:

$$x_G = \frac{\alpha\, x_A + \beta\, x_B + \gamma\, x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad ، \quad y_G = \frac{\alpha\, y_A + \beta\, y_B + \gamma\, y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad و \quad z_G == \frac{\alpha\, x_A + \beta\, x_B + \gamma\, x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

### اختصار مجموع الأشعة $\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

- **الحالة الأولى** : إذا كان $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ فإنّ $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$

  حيث G هي مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$
- **الحالة الثانية** : إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فإنّ :

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$$

أي المجموع $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M و يساوي الشعاع $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$

**تطبيق 20 تعيين مجموعات نقط**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقط $A(1;2;-1)$ ، $B(0;2;1)$ و $C(3;-2;2)$

1. عيّن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$
2. عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$
3. عيّن $(\mathcal{G})$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
4. عيّن $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

## كيف يتم تعيين تقاطع سطح كرة و مستو ؟

بمقارنة الطولين: نصف قطر سطح الكرة $R$ و المسافة $d$ بين $O$ مركز سطح الكرة و المستوي $\mathcal{P}$.

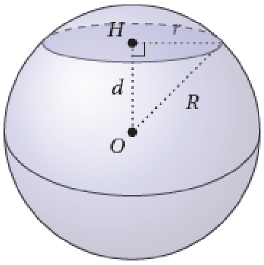
إذا كان $\boldsymbol{d < R}$

فإن $S$ و $\mathcal{P}$ يتقاطعان في دائرة:

مركزها النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستوي $\mathcal{P}$

و نصف قطرها :

$$r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$$




**تطبيق 21 تعيين تقاطع مستو و سطح كرة**

نعتبر المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $x + 2y + 2z - 4 = 0$ و سطح الكرة $\mathcal{S}$ الذي مركزه النقطة $\Omega(1;1;2)$ و نصف قطره 3. أدرس تقاطع المستوي $\mathcal{P}$ و سطح الكرة $\mathcal{S}$

## كيف يتم حساب بعد نقطة عن مستقيم

المسافة $d$ بين المستقيم $\mathcal{D}$ الممثل وسيطيا و النقطة $A$ :

1. **الطريقة الأولى**: نعيّن النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $\mathcal{D}$. عندئذ $d = AH$
2. **الطريقة الثانية**: نحسب بدلالة الوسيط، المسافة $AM$ حيث $M$ نقطة كيفية من المستقيم $\mathcal{D}$ ثمّ (بدراسة تغيّرات دالة) نعيّن أصغر قيمة للمسافة $AM$

**تطبيق 22 حساب بعد نقطة عن مستقيم**

أحسب، بطريقتين مختلفتين، المسافة بين المستقيم $\mathcal{D}$ المعرف بـ $\mathcal{D}: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ حيث $t$ عدد حقيقي و النقطة $A(3;1;4)$

# تمارين و مسائل للتعمق

**01** الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$،

نعتبر النقط: $A(1;1;0)$ ، $B(1;2;1)$ ، $C(3;-1;2)$

1.(أ) أثبت أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامة واحدة.

(ب) أثبت أنّ للمستوي $(ABC)$ المعادلة الديكارتية:

$$2x+y-z-3=0$$

2.نعتبر المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ المعرفين على الترتيب بمعادلتيهما

$$x+2y-z-4=0 \quad \text{و} \quad 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أنّ تقاطع $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ هو المستقيم $\mathcal{D}$ المُمثل وسيطيا بالجملة:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

3.ما هو تقاطع المستويات الثلاثة $(ABC)$، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ؟

4.عيّن المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $\mathcal{D}$

**02** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;2;2)$ ، $B(3;2;1)$ ، $C(1;3;3)$

1.أثبت أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ تعيّن مستوي. عيّن معادلة ديكارتية لهذا المستوي

2.نعتبر المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ المعرفين بهذا الترتيب بالمعادلتين:

$$\mathcal{P}_1:\ x-2y+2z-1=0$$
$$\mathcal{P}_2:\ x-3y+2z+2=0$$

(أ) أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعين. ليكن $\Delta$ مستقيم تقاطعهما.

(ب) تحقق أنّ النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $\Delta$ .

(جـ) أثبت أنّ $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $\Delta$.

(د) استنتج تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$

3.لحساب بُعد النقطة $A$ عن المستقيم $\Delta$ المثل وسيطيا بـ: $\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$

مع $k$ عدد حقيقي نعتبر النقطة $M$ ذات الوسيط $k$ من المستقيم $\Delta$.

(أ) عيّن قيمة $k$ حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدان.

(ب) استنتج بُعد النقطة $A$ عن المستقيم $\Delta$.

**03** المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

**الهدف من هذا التمرين هو تعيين الوضعية النسبية لعناصر من الفضاء**

$\mathcal{P}$ هو المستوي الذي يشمل النقطة $A(3;1;2)$ و حيث $\vec{n}(1;-4;1)$ هو شعاع ناظمي له

$\mathcal{D}$ هو المستقيم المار بالنقطة $B(1;4;2)$ و حيث $\vec{u}(1;1;3)$ شعاع توجيه له

$\mathcal{S}$ هو سطح الكرة الذي مركزه $\Omega(1;3;0)$ و المّار بالنقطة $A$

1.**تقاطع المستوي $\mathcal{P}$ و المستقيم $\mathcal{D}$**

(أ) أثبت أنّ للمستوي $\mathcal{P}$ المعادلة الديكارتية: $x-4y+z-1=0$

(ب) أثبت أنّ المستقيم $\mathcal{D}$ و المستوي $\mathcal{P}$ متوازيان تماما

2.**تقاطع المستوي $\mathcal{P}$ و سطح الكرة $\mathcal{S}$**

(أ) أحسب المسافة $d$ بين النقطة $\Omega$ و المستوي $\mathcal{P}$

(ب) أحسب نصف قطر سطح الكرة $\mathcal{S}$. برّر أنّ المستوي $\mathcal{P}$ و سطح الكرة $\mathcal{S}$ يتقاطعان و تقاطعهما دائرة

(جـ) أحسب نصف قطر دائرة التقاطع و عيّن مركزها

3.**تقاطع المستقيم $\mathcal{D}$ و سطح الكرة $\mathcal{S}$**

(أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}$

(ب) عيّن معادلة ديكارتية لسطح الكرة $\mathcal{S}$

(جـ) استنتج أنّ المستقيم $\mathcal{D}$ يقطع سطح الكرة $\mathcal{S}$ في نقطتين $M$ و $N$ (لا يُطلب تعيين إحداثياتيهما)

**04** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$،

1.نعتبر المستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ و حيث $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لهُ

و المستوي $\mathcal{R}$ ذو المعادلة: $x+2y-7=0$

(أ) أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ متعامدان.

(ب) أثبت أنّ تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ هو المستقيم $\Delta$ المار بالنقطة $C(-1;4;-1)$ و الموّجه بالشعاع $\vec{u}(2;-1;1)$

(جـ) لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$. أحسب المسافة بين النقطة $A$ و المستوي $\mathcal{P}$، ثمّ المسافة بين النقطة $A$ و المستوي $\mathcal{R}$.

(د) أحسب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $\Delta$.

2.(أ) نعتبر من أجل كل عدد حقيقي $t$ النقطة $M_t$ ذات الاحداثيات $(1+2t;3-t;t)$.

أكتب بدلالة $t$ المسافة $AM_t$. لتكن $\varphi(t)$ هذه المسافة.

(ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $t\mapsto\varphi(t)$ المعرفة على $\mathbb{R}$. حدّد قيمتها الحدّية الصغرى.

(جـ) فسر هندسيا هذه القيمة الحدّية الصغرى.

**05** في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$

1.بيّن أن النقط $A$، $B$ و $C$ تعيّن مستويا

2.بيّن أنّ $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

3.$D$ و $H$ نقطتان من الفضاء حيث $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

(أ) تحقق أنّ النقطة $D$ لا تنتمي إلى المستوي $(ABC)$

(ب) بيّن أنّ النقطة $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

(جـ) استنتج أنّ المستويين $(ADH)$ و $(ABC)$ متعامدان، ثمّ جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما

**06** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

نعتبر النقط الثلاثة $A$، $B$ و $C$ المعرفة بإحداثياتها:

$A(-1;2;1)$ ، $B(1;-6;-1)$ و $C(2;2;2)$

1.(أ) تحقق أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامة واحدة

(ب) أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;-3)$ هو شُعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$

(ج) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

2.ليكن $\mathcal{P}$ المستوي ذو المعادلة $x-y+z-4=0$

(أ) أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $(ABC)$ متقاطعان

(ب) ليكن $\mathcal{D}$ مستقيم تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $(ABC)$. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}$

3.نعتبر سطح الكرة $\mathcal{S}$ الذي مركزه $\Omega(3;1;3)$ و نصف قطره 3 و لتكن $I$ النقطة ذات الإحداثيات $(2;-1;1)$. نقبل أنّ للمستقيم $\mathcal{D}$ التمثيل الوسيطي التالي:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{مع } t \in \mathbb{R}$$

(أ) أثبت النقطة $I$ تنتمي إلى المستقيم $\mathcal{D}$

(ب) أثبت النقطة $I$ تنتمي إلى السطح الكرة $\mathcal{S}$

(ج) أثبت أنّ المستقيم $\mathcal{D}$ يقطع سطح الكرة في نقطة ثانية

**07** الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ و $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$

و لتكن $I$ منتصف القطعة $[AB]$

1.(أ) احسب إحداثيات النقطة $I$

(ب) بيّن أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ $\mathcal{P}$ المستوى المحوري لـ $[AB]$

2.اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$ الذي يشمل النقطة $C$ و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له

3.(أ) جد إحداثيات $E$ نقطة تقاطع المستوي $\mathcal{P}$ و المستقيم $\Delta$

(ب) بيّن أنّ $\Delta$ و $(AB)$ من نفس المستوي، ثمّ استنتج أنّ المثلث $IEC$ قائم

4.(أ) بيّن أنّ المستقيم $(ID)$ عمودي على كل من المستقيم $(AB)$ و المستقيم $(IE)$

(ب) احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$

**08** **الجزء الأول**

لتكن $A$ و $D$ نقطتين من الفضاء و لتكن $I$ منتصف القطعة $[AD]$

1.أثبت أنّه، من أجل كل نقطة $M$ من الفضاء، لدينا:

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$$

2.استنتج المجموعة $\mathcal{E}$ للنقط $M$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$

**الجزء الثاني**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ ، $D(-5;0;1)$

1.(أ) تحقق أنّ $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$

(ب) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

2.(أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$ العمودي على المستوي $(ABC)$ و الذي يشمل النقطة $D$

(ب) استنتج إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

(ج) أحسب المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(ABC)$

(د) أثبت أنّ النقطة $H$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{E}$ المعرفة في الجزء الأول

**09** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $I$ ذات الإحداثيات التالية:

$A(-1;2;1)$　$B(1;-6;-1)$　$C(2;2;2)$　$I(0;1;-1)$

1.(أ) أحسب مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

برّر أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ تُعيّن مستو $\mathcal{P}$

(ب) ليكن الشعاع $\vec{u}$ ذو المركبات $(1;1;-3)$. أثبت أنّ $\vec{u}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

(ج) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$

2.ليكن $\mathcal{Q}$ المستوي ذو المعادلة: $x+y-3z+2=0$

و ليكن $\mathcal{Q}'$ المستوي المعرف بالمعلم $(O;\vec{\imath},\vec{k})$

(أ) لماذا $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{Q}'$ يتقاطعان؟

(ب) عيّن نقطة $E$ و شعاع توجيه $\vec{u}$ للمستقيم $\Delta$، مستقيم تقاطع المستويين $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{Q}'$

3.عيّن معادلة ديكارتية لسطح الكرة $S$ الذي مركزه $I$ و نصف قطره 2

4.نعتبر النقطتين $J(-2;0;0)$ و $K(1;0;1)$

عيّن تقاطع سطح الكرة $S$ و المستقيم $(JK)$

**10** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. نعتبر النقط :

$A(-2;0;1)$، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1.(أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثمّ الطوليتين $AB$ و $AC$

(ب) استنتج قيمة مقربة إلى الدرجة لقيس الزاوية $\widehat{BAC}$

(ج) استنتج أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامة واحدة

2.تحقق أنّ المعادلة $2x-y+2z+2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

3.ليكن $\mathcal{P}_1$ المستوي ذي المعادلة $2x+2y-z+5=0$ و المستوي $\mathcal{P}_2$ ذي المعادلة $4x-2y-5y-5=0$

أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان في مستقيم $\mathcal{D}$ حيث الجملة التالية هي تمثيلا وسيطيا له

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t-3 \\ z = 2t+1 \end{cases} \quad \text{مع } t \text{ عدد حقيقي}$$

4.أثبت أنّ المستقيم $\mathcal{D}$ عمودي على المستوي $(ABC)$ ثمّ عيّن نقطة تقاطعهما

5. ليكن $(S)$ سطح كرة الذي يمسّ المستوي $(ABC)$ في النقطة $D(-1;-2;-1)$ و حيث المسافة بين مركزه و المستوي $(ABC)$ هي $d=3$. عيّن معادلة ديكارتية لـ $(S)$

**11** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. نعتبر النقطة $A$ ذات الإحداثيات $(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}$ ذو المركبات $(1;5;-1)$
عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ المار بالنقطة $A$ و حيث الشعاع $\vec{u}$ هو شعاع توجيه له

2. نعتبر المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ذوا المعادلتين $x-y-z=7$ و $x-2z=11$ على الترتيب.
(أ) أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d')$ تقاطع $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$
(ب) أثبت أنّ الشعاع ذو الإحداثيات $(2;1;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(d')$

3. أثبت أنّ المستقيمين $(d)$ و $(d')$ ليسا من نفس المستوي

4. نعتبر النقطة $H$ ذات الإحداثيات $(-3;3;5)$ و النقطة $(H')$ ذات الإحداثيات $(3;0;-4)$
(أ) تحقق أنّ $H$ تنتمي إلى $(d)$ و أنّ $H'$ تنتمي إلى $(d')$
(ب) أثبت أنّ المستقيم $(HH')$ هو عمودي على كل من المستقيمين $(d)$ و $(d')$
(جـ) أحسب المسافة بين المستقيمين $(d)$ و $(d')$ أي المسافة $HH'$

5. عيّن مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{MH'}\cdot\overrightarrow{HH'}=126$

**12** الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ و $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$ و المستوي $\mathcal{P}$ المعرف بالتمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$$

مع $\alpha$ و $\beta$ وسيطان حقيقيان

1. (أ) بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا
(ب) تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ثمّ أكتب معادلة ديكارتية له

2. (أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$ ثم بيّن أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان
(ب) بيّن أنّ تقاطع $(ABC)$ و $\mathcal{P}$ هو المستقيم $\Delta$ ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t \\ z=-7+5t \end{cases}$$

مع $t$ عدد حقيقي
(جـ) احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $(ABC)$ و المسافة بين النقطة $D$ و المستوي $\mathcal{P}$ ، ثم استنتج المسافة بين النقط $D$ و المستقيم $\Delta$

3. ليكن $\mathcal{Q}$ المستوي الذي يشمل النقطة $D$ و عمودي على كل من المستويين $\mathcal{P}$ و $(ABC)$
(أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{Q}$
(ب) بيّن أنّ المستويات الثلاثة $(ABC)$، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ تتقاطع في نقطة واحدة $H$ ثمّ عيّن إحداثيات $H$
(جـ) احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $\Delta$

**13** الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(3;-2;-1)$ ، $B(5;-3;2)$ و $C(2;3;2)$ و $D(1;-5;-2)$

1. بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا ، نرمز له بالرمز $\mathcal{P}$

2. بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي $\mathcal{P}$ ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$

3. (أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$ الذي يشمل النقطة $D$ و يُعامد المستوي $\mathcal{P}$
(ب) عيّن إحداثيات النقطة $E$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على $\mathcal{P}$

4. $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستقيم $(AB)$ و $\lambda$ العدد الحقيقي حيث : $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$
(أ) بيّن أنّ :

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\square$$

(ب) استنتج العدد $\lambda$ و إحداثيات النقطة $H$ ، ثمّ المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(AB)$

**14** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط:

$A(1;-1;3)$ ، $B(0;3;1)$ ، $C(6;-7;-1)$ ، $D(2;1;3)$ و $E(4;-6;2)$

1. (أ) أثبت أنّ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$ هو النقطة $E$
(ب) استنتج المجموعة $\Gamma$ للنقط $M$ التي تحقق

$$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=2\sqrt{21}$$

2. (أ) أثبت أنّ النقط $A$ ، $B$ و $D$ تعيّن مستوي
(ب) أثبت أنّ المستقيم $(EC)$ عمودي على المستوي $(ABD)$
(جـ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABD)$

3. (أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(EC)$
(ب) عيّن إحداثيات النقطة $F$ تقاطع المستقيم $(EC)$ و المستوي $(ABD)$

4. أثبت أنّ المستوي $(ABD)$ و المجموعة $\Gamma$ (المُعيّنة في السؤال 1) متقاطعان. حدّد العناصر المُميّزة لهذا التقاطع.

**15** في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(1;-2;4)$ و $C(-1;0;1)$ و المستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $2x+y-z+3=0$

1. ليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستوي $\mathcal{P}$

(أ) هل يوجد عدد حقيقي $\alpha$ بحيث $\vec{A}=\alpha\vec{n}$ ؟ ماذا تستنتج ؟

(ب) بيّن أنّ التمثيل الوسيطي للمستوي $\mathcal{Q}$ الذي يمر بالنقطة $A$ و يُوازي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ (أي $(A;\overrightarrow{AB};\vec{n})$ معلما له) هي الجملة $\begin{cases}x=1+2t \quad t'\\y=1-3t+t'\\z=4t-t'\end{cases}$

حيث $t$ و $t'$ عددين حقيقيين

(ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{Q}$ و أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان

2. بيّن أنّ $C$ هي نقطة مشتركة للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ و أنّ الشعاع $\vec{u}(14;-11;17)$ يُعامد كل من $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ حيث $\vec{n'}$ هو شعاع ناظمي للمستوي $\mathcal{Q}$

3. استنتج تمثيل وسيطي للمستقيم $\mathcal{D}$ المسقط العمودي للمستقيم $(AB)$ على المستوي $\mathcal{P}$

**16** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$

1. أثبت أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية

2. ليكن $\mathcal{D}$ المستقيم المُمثل وسيطيا بالجملة:

$$\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})\square$$

(أ) أثبت أنّ المستقيم $\mathcal{D}$ عمودي على المستوي $(ABC)$

(ب) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

3. ليكن $H$ نقطة تقاطع المستقيم $\mathcal{D}$ و المستوي $(ABC)$

(أ) أثبت أنّ $H$ هو مرجح النقط $(A;-2)$، $(B;-1)$ و $(C;2)$

(ب) عيّن طبيعة المجموعة $\Gamma_1$ للنقط $M$ من الفضاء التي تحقق:

$$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

مع تحديد العناصر المميزة لهذه المجموعة

(ج) عيّن طبيعة المجموعة $\Gamma_2$ للنقط $M$ من الفضاء التي تحقق:

$$\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}\square$$

مع تحديد العناصر المميزة لهذه المجموعة

(د) عيّن طبيعة و العناصر المميزة لتقاطع المجموعتين $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$

(هـ) هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى تقاطع المجموعتين

**17** في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقطتين $A\left(\frac{2}{3};-3;2\right)$ و $B\left(-\frac{4}{3};0;-4\right)$ و ليكن $I$ منتصف $[AB]$ و $\mathcal{S}$ سطح الكرة الذي قطره $[AB]$

1. ليكن $E$ مرجح النقطتين المثقلتين $(A;2)$ و $(B;1)$

(أ) أحسب إحداثيات النقطة $E$

(ب) أثبت أنّ المجموعة $\mathcal{P}$ للنقط $M$ من الفضاء التي تحقق:

$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=3\|\overrightarrow{MO}\|$ هي المستوي المحوري للقطعة $[OE]$

(ج) أثبت للمجموعة $\mathcal{P}$ المعادلة $y=-1$

2. (أ) أحسب نصف قطر سطح الدائرة $\mathcal{S}$ و المسافة بين $I$ مركز سطح الكرة و المستوي $\mathcal{P}$

(ب) استنتج أن مجموعة التقاطع $\mathcal{C}$، للمستوي $\mathcal{P}$ و سطح الكرة $\mathcal{S}$، غير خالية

(ج) أثبت أنّ المعادلة $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$ هي معادلة للمجموعة $\mathcal{C}$ في المستوي $\mathcal{P}$

استنتج أنّ $\mathcal{C}$ هي دائرة يُطلب تحديد مركزها و نصف قطرها.

3. لتكن $D$ النقطة ذات الإحداثيات $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};4\sqrt{3}-1\right)$

(أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(ID)$

(ب) استنتج أنّ المستقيم $(ID)$ يقطع الدائرة $\mathcal{C}$ في نقطة $F$ يُطلب تعيين إحداثياتها

**18**

**تعريف**: $[AB]$ قطعة مستقيمة من الفضاء، و $I$ منتصف $[AB]$. نُسمي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ المستوي الذي يشمل $I$ و عمودي على $[AB]$

**خاصية**: المستوي المحوري لـ $[AB]$ هو مجموعة النقط من الفضاء حيث $MA=MB$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(4;0;-3)$ ، $B(2;2;2)$ ، $C(3;-3;-1)$ ، $D(0;0;-3)$

1. عيّن معادلة $\mathcal{P}_1$ المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

2. (أ) نقبل فيما يلي أنّ $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ المستويين المحوريين لـ $[BC]$ و $[CD]$ بهذا الترتيب لهما المعادلتان:

$$3x-3y+2z-5=0 \quad \text{و} \quad 2x-10y-6z-7=0$$

أثبت أن تقاطع $\mathcal{P}_1$، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها

(ب) أثبت أنّ النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ تنتمي إلى سطح الكرة الذي مركزه $E$. ما هو نصف قطره؟

**19** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(3;0;10)$ ، $B(0;0;15)$ ، $C(0;20;0)$

1. (أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$.

(ب) أثبت أنّ المستقيم $(AB)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $E(9;0;0)$.

(ج) برّر أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن $H$ نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من $O$ في المثلث $OBC$ مع المستقيم $(BC)$.

(أ) علل أنّ المستقيم $(BC)$ هو عمودي على المستوي $(OEH)$. استنتج أنّ $(EH)$ هو الارتفاع المرسوم من $E$ في المثلث $EBC$.

(ب) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(OEH)$.

(ج) تحقق أنّ للمستوي $(ABC)$ المعادلة الديكارتية:

$$20x+9y+12z-180=0$$

(د) بيّن أنّ الجملة:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$$ مع $t \in \mathbb{R}$

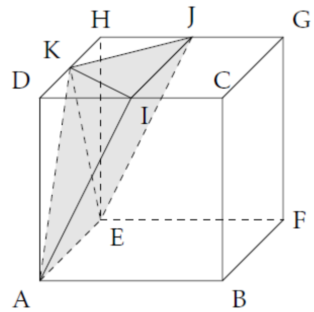
تقبل حلا وحيدا. ماذا يُمثل هذا الحل؟

**(هـ)** أحسب المسافة $OH$. استنتج أنّ $EH = 15$ و استنتج مساحة المثلث $EBC$.

3.بحساب حجم رباعي الوجوه $OEBC$ بطريقتين، استنتج بُعد النقطة $O$ عن المستوي $(ABC)$. هل يُمكن توقع هذه النتيجة من المعادلة المحصل عليها في السؤال 2. (جـ).

**20** ليكن المكعب $ABCDEFGH$ الممثل في الشكل المقابل

و لتكن النقط $I$، $J$ و $K$ منتصفات الأضلاع $[DC]$، $[GH]$ و $[DH]$ على الترتيب. نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$




1.أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(AEJI)$

2.استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(AEJI)$

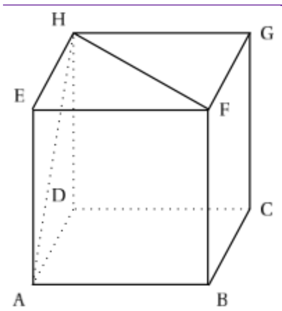
3.أحسب المسافة بين النقطة $K$ و المستوي $(AEJI)$

4.استنتج حجم الهرم

5.عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}$ العمودي على المستوي $(AEJI)$ و المار بالنقطة $K$.

استنتج إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\mathcal{D}$ و المستوي $(AEJI)$

**21** نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ الذي طول حرفه $a$. النقطة $I$ هي نقطة تقاطع المستقيم $(EC)$ و المستوي $(AFH)$




1.أحسب بدلالة $a$ الجداءات السلمية:

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$

2.استنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{AF}$ متعامدان.

نقبل كذلك أن $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{AH}$ متعامدان.

3.استنتج أنّ $I$ هي المسقط العمودي للنقطة $E$ على المستوي $(AFH)$

4.(أ) برّر التأكيدات التالية: المستقيمان $(AF)$ و $(EH)$ متعامدين، و المستقيمان $(AF)$ و $(EI)$ متعامدين.

(ب) استنتج أنّ المستقيم $(AF)$ عمودي على المستقيم $(HI)$

(جـ) أثبت كذلك أنّ المستقيم $(AH)$ عمودي على المستقيم $(FI)$

5.ماذا تُمثل النقطة $I$ بالنسبة إلى المثلث $AFH$ ؟

**22** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. نعتبر النقط: $A(3; -2; 2)$ $B(6; 1; 5)$ $C(6; -2; -1)$

1.(أ) بيّن أنّ المثلث $ABC$ قائم

(ب) ليكن $\mathcal{P}$ المستوي ذو المعادلة $x + y + z - 3 = 0$

بيّن أنّ المستوي $\mathcal{P}$ عمودي على المستقيم $(AB)$

(جـ) ليكن $\mathcal{P}'$ المستوي العمودي على $(AC)$ و الذي يشمل النقطة $A$.

عيّن معادلة للمستوي $\mathcal{P}'$

(د) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$ مستقيم تقاطع $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$

2.لتكن النقطة $D(0; 4; -1)$

(أ) بيّن أنّ المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$

(ب) عيّن حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$

(جـ) بيّن أنّ قيس الزاوية الهندسية $\widehat{BDC}$ بالراديان هو $\frac{\pi}{4}$

(د) أحسب مساحة المثلث $(BDC)$

**23** $A$، $B$ و $C$ هي ثلاث نقط من الفضاء ليست في استقامة واحدة. $k$ هو عدد حقيقي من المجال $[-1; 1]$ و $G_k$ هو مرجح الجملة:

$$\{(A; k^2+1), (B; k), (C; -k)\}$$

1.مثل النقط $A$، $B$، $C$ و $I$ منتصف $[BC]$ ثمّ أنشئ النقطتين $G_1$ و $G_{-1}$

2.**(أ)** بيّن أنّه من أجل كل $k$ من المجال $[-1; 1]$ لدينا:

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1} \overrightarrow{BC}$$

**(ب)** شكل جدول تغيرات الدالة $f$ المعرفة على المجال $[-1; 1]$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$$

**(جـ)** استنتج مجموعة النقط $G_k$ لما $k$ يمسح المجال $[-1; 1]$

3.عيّن $\mathcal{E}$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث:

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

4.عيّن $\mathcal{F}$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث:

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

5.فيما يلي، الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$، تأخذ النقط $A$، $B$ و $C$، على الترتيب، الإحداثيات التالية:

$(0; 0; 2)$، $(-1; 2; 1)$ و $(-1; 2; 5)$

**(أ)** عيّن إحداثيات $G_1$ و $G_{-1}$. أثبت أنّ $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ يتقاطعان

**(ب)** أحسب نصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ تقاطع $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$

**24** في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$، نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ ذات الإحداثيات $(0; 6; 0)$، $(0; 0; 8)$ و $(4; 0; 8)$ على الترتيب.

1.**(أ)** أنجز شكلا يشمل كل النقط المعرفة في التمرين (وحدة الرسم: 1cm)

**(ب)** أثبت أنّ :

- المستقيمان $(BC)$ و $(BA)$ متعامدين
- المستقيمان $(CO)$ و $(OA)$ متعامدين
- المستقيم $(BC)$ عمودي على المستوى $(OAB)$

**(جـ)** أحسب بـ $cm^3$ حجم رباعي الوجوه $OABC$

**(د)** أثبت أنّ النقط الأربعة $O$، $A$، $B$، $C$ تنتمي إلى سطح كرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

2.نرفق بكل عدد حقيقي $k$ من المجال $[0;8]$ النقطة $M$ ذات الإحداثيات $(0;0;k)$

المستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة و العمودي على المستقيم $(OB)$ يقطع، بهذا الترتيب، المستقيمات $(OC)$، $(AC)$ و $(AB)$ في النقط $N$، $P$ و $Q$

**(أ)** عيّن طبيعة الرباعي $MNPQ$

**(ب)** هل المستقيم $(MP)$ عمودي على المستقيم $(OB)$؟

عيّن قيمة $k$ التي من أجلها يكون المستقيم $(MP)$ عموديا على المستقيم $(AC)$

**(جـ)** أحسب $MP^2$ بدلالة $k$. ما هي قيمة $k$ التي من أجلها تكون المسافة أصغر ما يُمكن؟

**25** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نعتبر المستقيم $\Delta$ المعرف بما يلي: $\begin{cases}2x-y+5=0\\3x+y-z=0\end{cases}$

1.هل النقطة $M(1;2;5)$ تنتمي إلى المستقيم $\Delta$ ؟

2.هل الشعاع $\vec{u}(1;2;5)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $\Delta$ ؟

3.هل المستقيم $\Delta$ هو محتوى في المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $x+2y-z-5=0$ ؟

4.هل المستقيم $\Delta$ هو عمودي على المستوي $\mathcal{P}'$ذو المعادلة $x+2y+5z-10=0$ ؟

5.هل المستقيم $\Delta$ هو موازي للمستوي $\mathcal{P}''$ذو المعادلة $-5x+z=0$ ؟

**26** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1.المستقيم الذي يشمل النقطتين $A(1;2;-4)$ و $B(-3;4;1)$

و المستقيم الممثل بـ $\begin{cases}x=-11-4t\\y=8+2t\\z=11+5t\end{cases}$ ( $t$ عدد حقيقي) هما:

- ◻ متقاطعان
- ◻ متوازيان تماما
- ◻ منطبقان
- ◻ ليسا من مستو واحد

2.ليكن المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $2x+3y-z+4=0$

و المستقيم $\mathcal{D}$ الممثل بـ $\mathcal{D}:\begin{cases}x=t\\x=t\\x=8+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

- ◻ $\mathcal{P}$ و $\mathcal{D}$ متقاطعان
- ◻ $\mathcal{P}$ و $\mathcal{D}$ متوازيان تماما
- ◻ $\mathcal{D}$ محتوى في $\mathcal{P}$
- ◻ كل هذه الاقتراحات خاطئة

3.المسافة بين النقطة $A(1;2;-4)$ و المستوي ذو المعادلة $2x+3y-z+4=0$، هي:

◻ $\frac{8\sqrt{14}}{7}$ ◻ $16$ ◻ $8\sqrt{14}$ ◻ $\frac{8}{7}$

4.لتكن النقطة $B(-3;4;1)$ و سطح الكرة ذو المعادلة $x^2+y^2+z^2=16$ :

- ◻ $B$ هي داخل $\mathcal{S}$
- ◻ $B$ هي خارج $\mathcal{S}$
- ◻ $B$ تنتمي إلى $\mathcal{S}$
- ◻ لا نعلم

## أسئلة مفتوحة

**27** عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة $A(-1;2;1)$ و يحتوي على المستقيم $\mathcal{D}$ تقاطع المستويين ذواتا المعادلتين $x+y-z=2$ و $2x-y+3z=1$ على الترتيب

**28** عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم يشمل النقطة $A(-1;7;4)$ و يوازي المستوي ذو المعادلة $2x-3y+5z-10=0$

**29** $\mathcal{P}$ هو المستوي ذو المعادلة $3x-2y+z=1$ و $\mathcal{D}$ هو المستقيم الممثل وسيطيا بالجملة $\begin{cases}x=3-t\\y=2+t\\z=-4+2t\end{cases}$ حيث $t$ عدد حقيقي

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$ الذي يشمل النقطة $A(3;2;-4)$، العمودي على $\mathcal{D}$ و المحتوى في $\mathcal{P}$

**30** $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ هما المستقيمان المعرفان، على الترتيب، بالجملتين $\begin{cases}x=t-1\\y=2t-3\ (t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=t-2\\y=-t+1\ (t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\Delta$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;-1)$ و يقطع كل من $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$

**31** نعتبر في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطتان $A(2;2;2)$ و $B(1;0;1)$ و ليكن $\mathcal{P}$ المستوي ذو المعادلة $2x-y+2z-4=0$

عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{R}$ الذي يشمل $A$ و $B$ و يشمل النقطة $H$ التي تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$ و التي تُحقق $AH=d(A;\mathcal{P})$

**32** $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ هما المستقيمان المعرفان، على الترتيب، بالجملتين $\begin{cases}x=t-1\\y=t+1\quad(t\in\mathbb{R})\\z=-t+4\end{cases}$ و $\begin{cases}x=-2s+5\\y=3\quad(s\in\mathbb{R})\\z=s-3\end{cases}$

عيّن المسافة بين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$

**33** $\mathcal{P}$ هو المستوي ذو المعادلة $x+y+z-5=0$

$\mathcal{S}$ هو سطح الكرة ذو المعادلة $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$

المستوي $\mathcal{P}$ يمس سطح الكرة $\mathcal{S}$ في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها

## حل تمارين و إرشادات