2014

الدرس السادس

الأعداد المركبة

إعداد: الأستاذ ك. حامدي

6

ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة

في هذا المحور

المستوي المركب..... 1
مرافق عدد مركب..... 3
الشكل المثلثي لعدد مركب..... 4
خواص الطويلة و العمدة..... 6
الشكل الأسّي..... 7
المعادلات من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية 8
الأعداد المركبة و الهندسة..... 9
الأعداد المركبة و التحويلات النقطية 11
أعمال موجهة 14
ملحق 15
تمارين و مسائل للتعمق..... 16
حل تمارين و إرشادات..... 20

المستوي المركب

الشكل الجبري لعدد مركب و قواعد الحساب في $\mathbb{C}$

مبرهنة

توجد مجموعة يُرمز لها $\mathbb{C}$ ، تُسمّى مجموعة الأعداد المركبة و التي لديها الخواص التالية:

- $\mathbb{C}$ تشمل جميع الأعداد الحقيقية
- تمتد عمليتا الجمع و الضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد المركبة، و قواعد الحساب تبقى نفسها
- يوجد عدد مركب يُرمز له بالرمز i حيث $\mathrm{i}^2 = -1$
- كل عدد مركب z يُكتب عل الشكل الوحيد $z = x + \mathrm{i}y$ حيث x و y عددان حقيقيان

تعريف

تُسمّى الكتابة $z = x + \mathrm{i}y$ مع x و y عددان حقيقيان الشكل الجبري للعدد المركب z

x هو الجزء الحقيقي للعدد المركب z و يُرمز له $\mathrm{Re}(z)$

y هو الجزء التخيّلي للعدد المركب z و يُرمز له $\mathrm{Im}(z)$

مثلا: $z = 3 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ ، $\mathrm{Re}(z) = 3$ و $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2}$

ملاحظات و اصطلاحات

- القول أنّ العدد المركب z حقيقي يُكافئ القول أنّ $\mathrm{Im}(z) = 0$
- القول أنّ العدد المركب z تخيّلي صرف يُكافئ القول أنّ $\mathrm{Re}(z) = 0$

- يكون عددان مركبان متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيّلي. أي :

$x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y'$ تُكافئ $x = x'$ و $y = y'$

و بالأخص $x + \mathrm{i}y = 0$ تُكافئ $x = 0$ و $y = 0$

- إذا كان $z = x + \mathrm{i}y$ و $z' = x' + \mathrm{i}y'$ فإنّ:

$$z + z' = (x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$$
$$zz' = (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = xx' + \mathrm{i}^2yy' + \mathrm{i}(xy' + x'y)$$
$$= xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + x'y)$$
$$z^2 + z'^2 = (z + \mathrm{i}z')(z - \mathrm{i}z')$$
$$x^2 + y^2 = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)$$

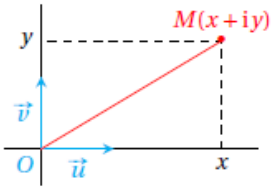
ملاحظة

$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$

$\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$□

التمثيل الهندسي لعدد مركب

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ هو معلم متعامد و متجانس للمستوي



- نرفق لكل عدد مركب $z = x + \mathrm{i}y$ مع x و y حقيقيان، النقطة M ذات الإحداثيات $(x; y)$ نقول أنّ النقطة M هي صورة العدد المركب z و أنّ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو كذلك صورة z
- و عكسيا كل نقطة $M(x; y)$ من المستوي هي صورة لعدد مركب وحيد $z = x + \mathrm{i}y$ نقول أنّ z هو لاحقة النقطة M و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM}$
- يُسمى عندئذ المستوي بالمستوي المركب

- الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل الذي نُسميه المحور الحقيقي
- الأعداد التخيّلية البحتة هي لواحق نقط محور التراتيب الذي نُسميه المحور التخيّلي الصرف
- $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ و نقول أنّ المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ مُباشر

تطبيقات

تطبيق 1 تعيين الشكل الجبري

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية

$z_1 = (2 + \mathrm{i}\sqrt{3})(5 - \mathrm{i}) + \left(\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}\right)^2$ $\quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+2\mathrm{i}}$ $\quad z_3 = \frac{1+4\mathrm{i}}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}$

تطبيق 2 حساب قوى العدد

1. أحسب i^3، i^4، i^5، i^6، i^7 و i^8
2. (أ) أثبت أنّه إذا كان العدد الطبيعي غير المعدوم n من مضاعفات 4 فإنّ $\mathrm{i}^n = 1$

(ب) عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، i^n ثمّ استنتج i^{2014}

تطبيق 3 تعيين مجموعة نقط

نعتبر العدد المركب $Z = x^2 + y^2 - 4 + \mathrm{i}(2x + y + 1)$

حيث x و y عددان حقيقيان.

1. عيّن ثمّ أنشئ المجموعة $\mathcal{E}$ للنقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون Z حقيقي
2. عيّن ثمّ أنشئ المجموعة $\mathcal{F}$ للنقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون Z تخيّلي صرف

مرافق عدد مركب

تعريف مرافق عدد مركب

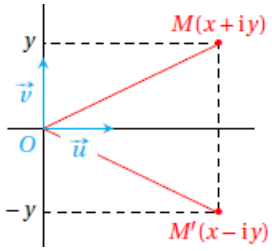
تعريف

مرافق العدد المركب $z = x + \mathrm{i}y$ مع x و y هو العدد المركب $x - \mathrm{i}y$ الذي يُرمز له $\overline{z}$

أمثلة

$\overline{3 + 2\mathrm{i}} = 3 - 2\mathrm{i}$ $\quad \overline{-4} = -4$ $\quad \overline{2\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$

التفسير الهندسي



في المستوي المركب، النقطة M' صورة $\overline{z}$ و النقطة M صورة z متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل

نتائج

- $z = z'$ يُكافئ $\overline{z} = \overline{z'}$
- مرافق $\overline{z}$ هو z بمعنى آخر $\overline{(\overline{z})} = z$
- إذا كان $z = x + \mathrm{i}y$ فإنّ $z + \overline{z} = 2x$ و $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}y$ أي:

$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ و $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$

و ينتج:

- z حقيقي يُكافئ $z = \overline{z}$
- z تخيّلي صرف يُكافئ $z + \overline{z} = 0$

المرافق و العمليات

z و z' عددان مركبان و n عدد طبيعي غير معدوم

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- إذا كان $z' \neq 0$، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- إذا كان $z \neq 0$، $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

البرهان

...

تطبيقات

تطبيق 4 الاثبات دون حساب

ليكن العددان المركبان $z_1 = \frac{3-\mathrm{i}}{5+7\mathrm{i}}$ و $z_2 = \frac{3+\mathrm{i}}{5-7\mathrm{i}}$

1. تحقق أنّ $z_2 = \overline{z_1}$
2. استنتج دون إجراء حساب أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و $z_1 - z_2$ هو عدد تخيّلي صرف.
3. أحسب $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ و تحقق من صحة هذه النتائج.

تطبيق 5 **استعمال الخواص و العمليات على المرافق**

P هو كثير حدود معرف في $\mathbb{C}$ بـ $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد مركب z، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
2. تحقق أنّ $1 + i$ جذر لكثير الحدود P. استنتج جذرا آخر لـ P

تطبيق 6 **تعيين مجموعة نقط بطريقتين**

عيّن، في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $Z = z^2 + \overline{z}$ حقيقي

طرائق

الطريقة الأولى $\text{Im}(z) = 0$

الطريقة الثانية : $Z = \overline{Z}$

الشكل المثلثي لعدد مركب

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$

طويلة عدد مركب

تعريف

z عدد مركب شكله الجبري $x + iy$ مع x و y حقيقيان.

طويلة z هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ و المعرف بـ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

التفسير الهندسي: إذا كانت النقطة M هي صورة العدد المركب z فإنّ $OM = |z|$

ملاحظات

- إذا كان z حقيقي فإنّ طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد الحقيقي z
- $|z| = 0$ يُكافئ $z = 0$ لأنّ $OM = 0$ يُكافئ $M = O$
- $z.\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

عمدة عدد مركب غير معدوم

تعريف

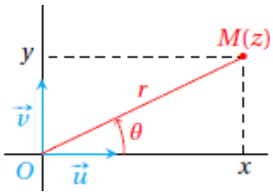
z عدد مركب **غير معدوم** صورته النقطة M. نُسمّي عمدةً للعدد z و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$

ملاحظات

- للعدد المركب z غير المعدوم عدد غير منته من العُمدات، إذا كان θ أحدهما فإنّ كل عمدةٍ أخرى للعدد z هي من الشكل $\theta + 2k\pi$

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

الإحداثيات القطبية



$z = x + iy$ عدد مركب صورته النقطة M. نُعلّم النقطة M في المستوي المركب بالإحداثيات الديكارتية $(x; y)$ أو بالإحداثيات القطبية أي بالثنائية $(r; \theta)$ حيث :

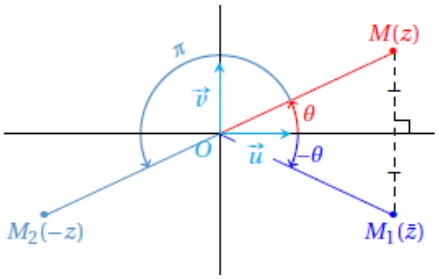
$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$$

و عليه : $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$

الشكل المثلثي

تعريف

z عدد مركب غير معدوم. تُسمّى الكتابة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ مع $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$ الشكل المثلثي للعدد المركب z



نتائج

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ و $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

العلاقة بين الشكل الجبري و الشكل المثلثي

- إذا كنّا نعلم r و θ فإنّ $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$
- و إذا كنّا نعلم x و y فإنّ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ و θ معرفة بما يلي :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

تساوي عددين مركبين مكتوبين بالشكل المثلثي

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$z = z'$ تكافئ $r = r'$ و $\theta = \theta' \quad [2k\pi]$

تطبيقات

تطبيق 7 قراءة الطويلة و عمدة عدد مركب على الشكل

مثل في المستوي المركب النقط ذات اللواحق التالية: 3 ؛ -4 ؛ $2i$ ؛ $1 + i$ ؛ $-1 + i$ ؛ $2 - 2i$

ثمّ، بدون حساب، و باعتبارات هندسية، أعط الطويلة و عمدة لكل عدد

تطبيق 8 الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

1. عيّن الطويلة و عمدة للعدد المركب $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$
2. استنتج الشكل المثلثي للعدد z

تطبيق 9 التعرف على الشكل المثلثي لعدد مركب

في كل حالة من الحالات التالية، جد الطويلة و عمدة للعدد المركب z:

(أ) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (ب) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (جـ) $z = \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$

خواص الطويلة و العمدة

طويلة و عمدة جُداء

مبرهنة

من أجل كل عددين مركبين غير معدومين z و z'

$$|z.z'| = |z|.|z'| \quad \text{و} \quad \arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

البرهان

...

مثال : $z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$ و $z' = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

نتائج : نُبرهن بالتراجع أنّه من أجل عدد طبيعي n و من أجل كل عدد مركب z غير معدوم:

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{و} \quad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$$

دستور موافر (Moivre) : بتطبيق النتيجة السابقة على العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

طويلة و عمدة كسر

مبرهنة

من أجل كل عددين مركبين غير معدومين z و z'

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

البرهان

...

مثال : $z = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ و $z' = \frac{3}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

نتائج : إذا كان z غير معدوم، $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ و $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

تطبيقات

تطبيق 10 حساب قوى عدد مركب

1. أعط الشكل الجبري للعدد المركب $z = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5$
2. (ب) أعط الشكل الجبري للعدد المركب $z = \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3}$

تطبيق 11 مقارنة كتابة عددين مركبين و استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

1. أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ ، $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ و $Z = \frac{z_1}{z_2}$
2. أكتب Z على الشكل الجبري و استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

تطبيق 12 تعيين مجموعة أعداد طبيعية

n عدد طبيعي، نضع $z = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^n$

1. عيّن عمدةً للعدد المركب z
2. استنتج المجموعة (E) قيم n التي يكون من أجلها z عدد حقيقي موجب تماما

الشكل الأسّي

العدد المركب الذي طويلته 1

يُكتب كل عدد مركب طويلته 1 على الشكل $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

مبرهنة

لتكن U مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 و لتكن f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي θ العدد المركب $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. من أجل كل عددين θ و θ' لدينا : $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$

البرهان

...

النتيجة :

كما هو الحالة بالنسبة للدالة الأسية فإنّ الدالة f " تُحوّل كذلك الجمع إلى جداء " ومنه الترميز التالي

تعريف

يُرمز إلى العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدةٌ له بالرمز $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ أي $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\cos\theta$

الحالة العامة

z عدد مركب غير معدوم. نُسمّي الكتابة $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ مع $r = |z|$ الشكل الأسّي للعدد z

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

- $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
- $\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
- $\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
- $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ تُكافئ $r = r'$ و $\theta = \theta'$ $[2\pi]$
- دستور موافر : من أجل كل عدد طبيعي n، $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$

مثال : $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ و $z' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

تطبيقات

تطبيق 13 الانتقال من شكل إلى آخر

في كل حالة ، أكتب العدد المركب z على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الجبري لكل من $\bar{z}$ و $\frac{1}{z}$:

(أ) $z = \frac{1}{1+\mathrm{i}}$ (ب) $z = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ (جـ) $z = -7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

تطبيق 14 استعمال الأشكال المختلفة لعدد مركب

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الرسم: 4 cm).

نعتبر النقط A، B، C، D ذات اللواحق على الترتيب: $a = 1$ ؛ $b = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1. أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري.
2. (أ) مثل النقط A، B، C و D في المعلم.
   (ب) برهن أن الرباعي OACB هو معين

المعادلات من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية

الجذران التربيعيان لعدد حقيقي

تعريف

a عدد حقيقي. الحلول في $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2 = a$ تُسمّى الجذور التربيعية للعدد a في $\mathbb{C}$

خاصية

كل عدد حقيقي يقبل جذرين تربيعيين في $\mathbb{C}$

- إذا كان $a \geq 0$ ، فإنّهما العددان الحقيقيان $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
- إذا كان $a < 0$ ، فإنّهما العددان المركبان المترافقان $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$

مثال: الجذران التربيعيان للعدد 2 في $\mathbb{C}$ هما $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و الجذران التربيعيان للعدد -3 في $\mathbb{C}$ هما $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$

الجذران التربيعيان لعدد مركب

تعريف

w عدد مركب. يُسمى الحلان في $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2 = w$ الجذرين التربيعيين للعدد w في $\mathbb{C}$

خاصية

كل عدد مركب يقبل جذرين تربيعيين في $\mathbb{C}$

مثال : عيّن الجذرين التربيعيين للعدد المركب $w = 15 - 8i$

المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ (مع a، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$)

مبرهنة

لتكن المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ (a ، b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$) مُميّزها ، $\Delta = b^2 - 4ac$

- إذا كان $\Delta = 0$ ، فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $-\frac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta \neq 0$ ، فإنّ المعادلة :
  - تقبل حلين حقيقيين إذا كان $\Delta > 0$ و هما $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  - تقبل حلين مركبين مترافقين إذا كان $\Delta < 0$ و هما $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

ملاحظة

إذا كانت z_1 و z_2 حلي المعادلة ، فإنّ من أجل كل عدد مركب z ، $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

مثال : حلا المعدلة $z^2 + z + 1 = 0$ هما : $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

تطبيقات

تطبيق 15 حل معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول z : $z^2 - 2(\sin\theta)z + 1 = 0$ و حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0;\pi[$.

1. تحقق أنّ $\Delta = -4\cos^2\theta$
2. (ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المقترحة و تحقق أنّ حلول هذه المعادلة تُكتب: $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ و $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

تطبيق 16 حل معادلة من الدرجة الرابعة بمعاملات حقيقية

نعتبر كثير الحدود : $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$

1. أثبت أنّه يوجد كثير حدود $Q(x)$ من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية حيث من أجل كل عدد مركب z ، $P(z) = (z^2+1)Q(x)$
2. (ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z) = 0$

تطبيق 17 حل معادلة باستعمال الشكل الجبري

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - \overline{z} + \frac{1}{4} = 0$

الأعداد المركبة و الهندسة

لاحقة شعاع

تعريف

لاحقة الشعاع $\vec{u}$ ذو المركبات $(a;b)$ هو العدد المركب $z = a + ib$

مبرهنة

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $z_B - z_A$ حيث z_A و z_B هما لاحقتا النقطتين A و B

البرهان

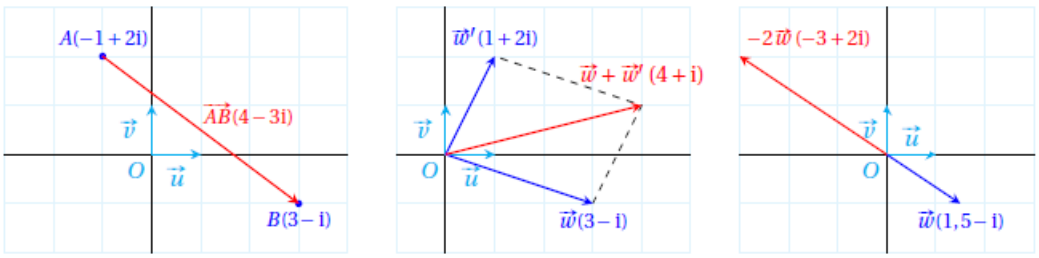
,,,

نتائج

1. تساوي شُعاعين يُكافئ تساوي لاحقتيهما
2. إذا كان $\vec{w}$ و $\overrightarrow{w'}$ شعاعان لاحقتيهما z و z' على الترتيب فإنّ العدد المركب $z + z'$ هو لاحقة الشعاع $\vec{w} + \overrightarrow{w'}$

و من أجل كل عدد حقيقي λ ، العدد المركب λz هو لاحقة الشعاع $\lambda\vec{w}$

أمثلة



لاحقة المرجح

مبرهنة

$(A;\alpha)$ ، $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ هي نقط مثقلة من المستوي لواحقها z_A ، z_B و z_C بهذا الترتيب، مع $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

لاحقة G مرجح هذه النقط هو العدد المركب:

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

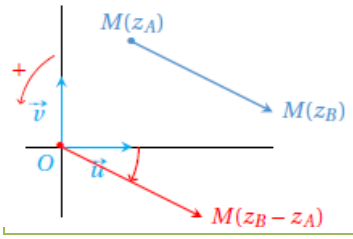
البرهان

...

نتائج

- لاحقة I منتصف القطعة $[AB]$ هو $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
- لاحقة G مركز ثقل المثلث MNP هو $z_G=\frac{z_M+z_N+z_P}{3}$

المسافة AB، الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{AB})$



$\overrightarrow{AB}$ هو شعاع غير معدوم و M النقطة حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$

لدينا:

$$AB=|z_B-z_A|$$

$$(\vec{u},\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)$$

أقياس زاوية موجهة

مبرهنة

A ، B ، C ، D هي النقط التي لواحقها z_A ، z_B ، z_C ، z_D حيث $z_A\neq z_B$ و $z_C\neq z_D$:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$$

البرهان

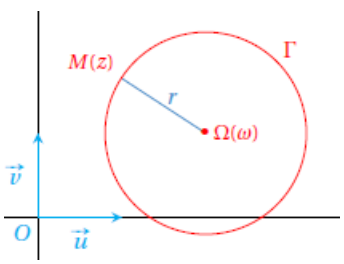
...

حالة خاصة

A ، B و M ثلاث نقط لواحقها a ، b ، z حيث $z\neq a$ و $z\neq b$، لدينا: $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$

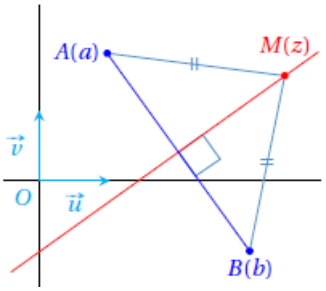
تحديد مجموعات نقط

• r عدد حقيقي موجب $(r>0)$. مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-a|=r$ هي الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة ω و نصف قطرها r



• A و B نقطتان لاحقتاهما a و b مع $(a\neq b)$.

مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-a|=|z-b|$ هي محور القطعة المستقيم $[AB]$



تطبيقات

تطبيق 18 استعمال نسبة أعداد مركبة

نعتبر، في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ، متجانس و مباشر $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقط A ، B ، C ، D بهذا الترتيب ذات اللواحق:

$$a=-2 \qquad b=2 \qquad c=-1+\mathrm{i} \qquad d=1-3\mathrm{i}$$

أثبت أنّ المثلثين BCD و ACD قائمين.

الطريقة: للبرهنة على أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان، يكفي أن نُبرهن أنّ $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$ يُساوي $+\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$

تطبيق 19 تعيين مجموعة نقط

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=1+\mathrm{i}$ و $z_B=2\mathrm{i}$

نرفق بكل عدد مركب z، $z\neq z_A$، العدد المركب $z'=\frac{z-2\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}$

1. عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ للنقط $M(z)$ حيث $|z'|=1$
2. عيّن المجموعة $\mathcal{F}$ للنقط $M(z)$ حيث z حقيقي
3. (جـ) عيّن المجموعة $\mathcal{G}$ للنقط $M(z)$ حيث z تخيّلي صرف

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

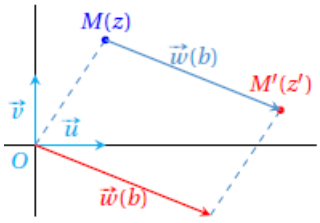
المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

T هو تحويل نقطي الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'.

يُمكن أن نرفق للتحويل النقطي T الدالة الوحيدة f المعرفة على $\mathbb{C}$ بـ $z\mapsto z'=f(z)$:

نُسمّي الكتابة $z'=f(z)$ العبارة المركبة للتحويل النقطي T

العبارة المركبة للانسحاب



مبرهنة

$\vec{w}$ هو شعاع لاحقته b

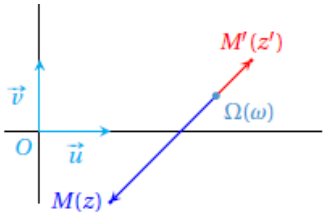
العبارة المركبة للانسحاب الذي شُعاعه $\vec{u}$ هي

$$z'=z+b$$

البرهان

...

العبارة المركبة للتحاكي



مبرهنة

Ω هي نقطة لاحقتها ω و k هو عدد حقيقي غير معدوم.

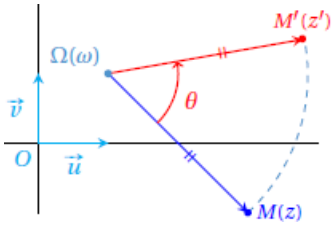
العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هي

$$z'-\omega=k(z-\omega)$$

البرهان

...

العبارة المركبة للدوران



مبرهنة

Ω هي نقطة لاحقتها ω و θ عدد حقيقي.

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هي

$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$□

البرهان

...

حالة خاصة : العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه O مبدأ المعلم و زاويته θ هي $z' = e^{i\theta}z$

تطبيقات

تطبيق 20 استعمال العبارة المركبة لتحاكي

h هو التحاكي الذي نسبته 2 و مركزه النقطة I ذو اللاحقة $1 + i$. لتكن A النقطة ذات اللاحقة $-1 - 2i$

1. عيّن العبارة المركبة للتحاكي h
2. عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالتحاكي h

تطبيق 21 استعمال العبارات المركبة

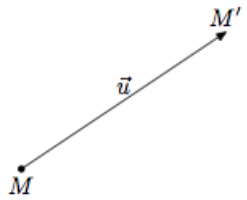
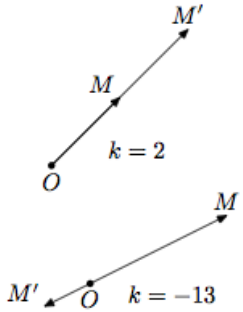
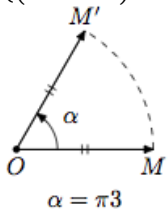
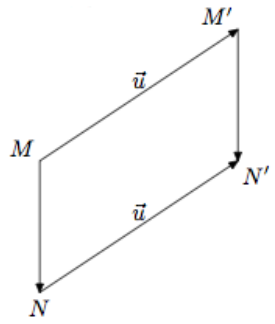
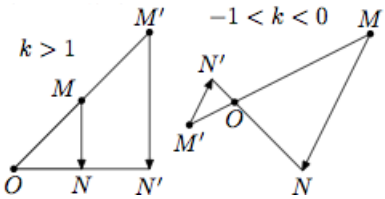
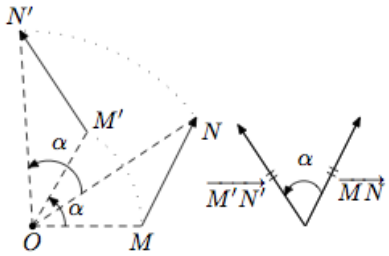
نعتبر، في المستوي المتعامد، المتجانس و المباشر $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقط A، B، C، P و الشعاع $\vec{w}$ ذات اللواحق:

$z_A = \frac{3}{2} + 6i$ ، $z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ، $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ ، $z_P = 3 + 2i$ ، $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$

h هو التحاكي الذي مركزه C نسبته $-\frac{1}{3}$، t هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ و r هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

1. أحسب لواحق النقط $Q = t(B)$، $R = h(P)$ و $S = r(P)$
2. أثبت أن المثلث PQR قائم و متساوي الساقين و استنتج طبيعة الرباعي $PQRS$

ملخص التحويلات النقطية (الانسحاب، التحاكي و الدوران)

	الانسحاب	التحاكي	الدوران (في المستوي المُوجه)
التعريف	الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ 	التحاكي الذي مركزه O و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ 	الدوران الذي مركزه O و زاويته α هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة O بنفسها و بكل نقطة $M \neq O$ من المستوي النقطة M' حيث: $\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \ [2\pi] \end{cases}$  $\alpha = \pi 3$
الترميز	يُرمز إلى الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ بالرمز $t_{\vec{u}}$	يُرمز إلى التحاكي الذي مركزه O و نسبته k بالرمز: $h(O,k)$	يُرمز إلى الدوران الذي مركزه O و زاويته α بالرمز: $r(O,\alpha)$
النقط الصامدة	• إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$: لا توجد نقط صامدة • إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$: كل النقط صامدة	• إذا كان $k \neq 1$: المركز O هو النقطة الصامدة الوحيدة • إذا كان $k = 1$: كل النقط صامدة	• إذا كان $\alpha \neq 0\ [2\pi]$: المركز O هو النقطة الصامدة الوحيدة • إذا كان $\alpha = 0\ [2\pi]$: كل النقط صامدة
الخواص المُميّزة	• من أجل كل نقطتين M و N ذات الصورتين M' و N' لدينا: $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ 	• O ، M و M' على استقامة واحدة • من أجل كل نقطتين M و N ذات الصورتين M' و N' لدينا: $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ 	من أجل كل نقطتين M و N ذات الصورتين M' و N' لدينا: • $M'N' = MN$ • $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha \ [2\pi]$ 
العبارة المركبة	انسحاب شعاعه $\vec{u}(b)$ $z' = z + b$	تحاك مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k $z' - \omega = k(z - \omega)$	دوران مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

و عكسيا كل تحويلا نقطيا عبارته المركبة هي $z' = az + b$ مع $a \neq 0$ هو:

• إذا كان $\boxed{a = 1}$:
انسحاب شعاعه $\vec{u}(b)$

• إذا كان $\boxed{a \in \mathbb{R}^* - \{1\}}$:
تحاك نسبته a. مركز التحاكي هو النقطة Ω ذات اللاحقة $w = \frac{b}{1-a}$

• إذا كان $\boxed{|a| = 1}$:
دوران زاويته $\arg a$. مركز الدوران هو النقطة Ω ذات اللاحقة $w = \frac{b}{1-a}$

أعمال موجهة

العمل الموّجه الأول: مجموعات نقط

في كل حالة من الحالات التالية، عيّن هندسيا مجموعة النقط M، من المستوي المركب، ذات اللاحقة z التي تحقق العلاقة المقترحة:

بدلالة الطويلة

(أ) $|z-3|=|z+2i|$ (ب) $\left|\bar{z}+\frac{i}{2}\right|=4$ (جـ) $\sqrt{2}|z+1|=|(1+i)z-4|$

(د) $|z+1-2i|<\sqrt{5}$ (هـ) $\left|\frac{z+2i}{z+1-2i}\right|>1$

بدلالة العمدة

(أ) $\arg(z)=\frac{\pi}{6}$ (ب) $\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\arg(iz)=-\frac{\pi}{4}$ (د) $\arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)=\frac{\pi}{2}$

العمل الموّجه الثاني: البرهان باستعمال الأعداد المركبة أو البرهان هندسيا

في المستوي المركب، ABC هو المثلث بحيث القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ينتمي إلى $]0;\pi[$.

نُنشئ خارج هذا المثلث، المربعين ACRS و BAMN ثمّ متوازي الأضلاع MASD و ليكن I مركزه.

- أنشئ الشكل.

الهدف من التمرين هو إثبات أنّ المستقيم (AD) هو ارتفاعٌ للمثلث ABC و أنّ $AD = BC$.

لهذا نستعمل طريقتين:

استعمال الأعداد المركبة

a، b و c هي لواحق على الترتيب للنقط A، B و C.

1. أحسب لواحق النقطتين S و M بدلالة a، b و c.
2. أحسب لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AD}$ و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$.
3. أثبت أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان و أنّ $AD = BC$

طريقة هندسية

ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

1. ما هي صور النقط M و C بالدوران r ؟
2. S' هي صورة S بالدوران r. أثبت أنّ النقطة A هي منتصف القطعة المستقيمة [CS'].
3. I' هي صورة I بالدوران r. أثبت أنّ النقطة I' هي منتصف القطعة المستقيمة [BS'].
4. استنتج أنّ المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (BC) و أنّ $AD = BC$

□

ملحق

التشابه المستوي المباشر

تمارين و مسائل للتعمق

01 نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة 4 و النقطتين M و N ذوات اللاحقتين

$$w = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \overline{w} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

1. عيّن الطويلة و عمدة للعدد w. و استنتج الطويلة و عمدة لـ $\overline{w}$
2. نعتبر العدد المركب $w - 4$. أكتب هذا العدد على الشكل الجبري ثمّ على الشكل المثلثي.
3. عيّن الطويلة و عمدة للعدد $\frac{w}{w-4}$ و استنتج الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{\overline{w}}{\overline{w}-4}$
4. استنتج أنّ النقط O ، A ، M و N تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديدها

02 نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B ذوات اللاحقتين $a = 5 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ و $b = 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ و لتكن Q منتصف $[OB]$

1. عيّن z_K لاحقة النقطة K بحيث يكون $ABQK$ متوازي الأضلاع
2. أثبت أنّ $\frac{z_K - a}{z_K}$ تخيّلي صرف. ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلث OKA ؟
3. لتكن النقطة C ذات اللاحقة $c = \frac{2a}{3}$. أحسب $\frac{z_K - b}{z_K - c}$

ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقط B ، C و K ؟

03 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. نعتبر التحويل النقطي h الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = 3z + 4 - 6\mathrm{i}$$

(أ) حدد طبيعة التحويل h و عناصره المميزة

(ب) اكتب z بدلالة z' ؟

(جـ) $(\mathcal{E})$ هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z + 2 - 3\mathrm{i}| = 1$. حدد المجموعة $(\mathcal{E})$ ثمّ استنتج أنّ صورتها بالتحويل h هي دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

2. I ، J ، K و L هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب :

$$z_I = \mathrm{i} \text{ ، } z_J = 4 - 3\mathrm{i} \text{ ، } z_K = -2 + 3\mathrm{i} \text{ و } z_L = \frac{z_K - z_J}{z_K - z_I}$$

(أ) بيّن أنّ النقطة L هي نقطة من حامل محور الفواصل يطلب تعيين فاصلتها

(ب) ما طبيعة المثلث IJL مع التبرير

04 $P(z)$ كثير حدود حيث $P(z) = (z + 1 + \mathrm{i})(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64)$

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$ ثمّ اكتب الحلول على الشكل الأسي

2. نضع $z_1 = -1 - \mathrm{i}$ و $z_2 = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$

(أ) اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

(جـ) بين أن العدد $\left(\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{z_1}{z_2}\right)^{144}$ حقيقي

(د) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B لواحقها على الترتيب z_1 و z_2

عيّن لاحقة النقطة C حتى تكون النقطة O مركز ثقل المثلث ABC

05 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$
2. لتكن النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق بهذا الترتيب:

$$z_A = 1 + \mathrm{i} \quad z_B = \overline{z_A} \quad z_C = 2z_B \quad z_D = 3$$

علم هذه النقط في المعلم (وحدة الرسم 1 cm)

3. أثبت أنّ النقط الثلاثة A ، B و C تنتمي إلى دائرة مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها
4. أحسب $\frac{Zc-3}{A-3}$ و استنتج طبيعة المثلث DAC
5. نعتبر النقطة C' صورة C بالتحاكي الذي مركزه D و نسبته 2 و النقطة C'' صورة C' بالدوران الذي مركزه D و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أثبت أنّ المستقيمين (AC) و $(C'C'')$ هما متعامدان

06 نعتبر من أجل كل عدد مركب z:

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

1. **(أ)** عيّن العدد الحقيقي b بحيث يكون:

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + 4)$$

(ب) حل، في $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الرسم: 2 cm).

نعتبر الأعداد المركبة:

$$z_0 = 2 \quad z_1 = \sqrt{2}(-1 + \mathrm{i}) \quad z_2 = \sqrt{2}(-1 - \mathrm{i})$$

(أ) عيّن الطويلة و عمدة لكل من z_1 و z_2.

(ب) علّم النقط A ، B و C ذات اللواحق z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب ثمّ النقطة I منتصف $[AB]$.

(جـ) أثبت أنّ المثلث OAB متساوي الساقين.

استنتج قيس للزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OI})$

(د) أحسب z_I لاحقة النقطة I ، ثمّ طويلة z_I.

(هـ) استنتج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

07 أجب بصحيح أو بخطأ مع التبرير الإجابة على الأسئلة التالية

- من أجل كل عدد مركب z، $\text{Re}(z^2) = (\text{Re}(z))^2$
- z عدد مركب غير معدوم. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C ذات اللواحق z، $\overline{z}$ و $\frac{z^2}{\overline{z}}$ على الترتيب هي من نفس الدائرة ذات المركز O
- من أجل كل عدد مركب z،

إذا كان $|1+iz| = |1-iz|$ فإنّ $\text{Im}(z) = 0$

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. z و z' عددان مركبان غير معدومين. M و M' نقطتان لاحقتيهما z و z' على الترتيب.

إذا كان $|z+z'| = |z-z'|$ فإنّ المستقيمين (OM) و (OM') متعامدان

08 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1.(أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية

$$z^2 - 3z + 3 = 0$$

نسمّي z_1 الحل الذي جزؤه التخيّلي موجب

(ب) اكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)$ على الشكل الأسي ثمّ احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^6$

2. M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' نقطة من المستوي لاحقتها z' حيث

$$z' = z^2 - 4z$$

A، B و I ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب هي :

$z_A = 2$، $z_B = -4$ و $z_I = -3$

(أ) احسب $(z'+4)$ بدلالة $(z-2)$ ثم استنتج $|z'+4|$ بدلالة $|z-2|$ و $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z+2)$

(ب) برهن أنّه إذا كانت النقطة M من الدائرة ذات المركز A و نصف القطر 2 فإنّ النقطة M' هي من دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

(جـ) برهن أنّه إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عموديا على الشعاع $\vec{u}$ فإنّ الشعاع $\overrightarrow{BM'}$ موازي للشعاع $\vec{u}$

(د) عيّن قيم العدد المركب z حتى يكون الرباعي $OMIM'$ متوازي الأضلاع

09 نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$z_A = 3-2i$ ، $z_B = 3+2i$ و $z_C = 4i$.:

1.أ) علم النقط ، B و C

ب) ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك .

جـ)عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$

2.عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$$

3.أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$

نسمي z_0، z_1 حلي هذه المعادلة .

ب) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب

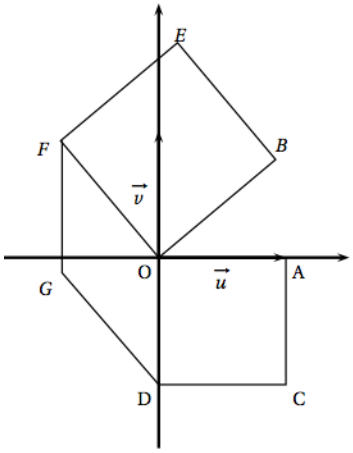
عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

10 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر في هذا المستوي النقطة A ذات اللاحقة 1، النقطة B ذات اللاحقة b حيث b هو عدد مركب جزؤه التخيّلي موجب تماما.

نُنشئ خارج المثلث OAB، المربعان المباشران $ODCA$ و $OBEF$ كما هو موضح في الشكل التالي



1.عيّن اللاحقتان c و d للنقطتين C و D على الترتيب

2.ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(أ) عيّن الكتابة المركبة للدوران r

(ب) استنتج أنّ اللاحقة للنقطة F هي ib

(جـ) عيّن اللاحقة e للنقطة E

3.نُسمّي G النقطة التي من أجلها يكون الرباعي $OFGD$ متوازي أضلاع

أثبت أنّ اللاحقة g للنقطة G تساوي $i(b-1)$

4.أثبت أنّ $\frac{e-g}{c-g} = i$ ثمّ استنتج أنّ المثلث EGC قائم و متساوي الساقين

11 نعتبر في مجموعة العداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z $(z \neq 2-3i)$ التالية :

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

1.حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة

2.ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتين لا حقتاهما على الترتيب : $z_A = 1+\sqrt{5}i$

و $z_B = 1-\sqrt{5}i$

تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

3.نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث :

$z' = \dfrac{3\mathrm{i}(z+2\mathrm{i})}{z-2+3\mathrm{i}}$ □

النقط C ، D و E لواحقها على الترتيب $z_C = -2\mathrm{i}$ ، $z_D = 2-3\mathrm{i}$ و $z_E = 3\mathrm{i}$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$

(أ) عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM

(ب) استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ)

12 المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 1-\mathrm{i}$ ، $z_B = -1+\mathrm{i}$ و $z_c = \sqrt{3}(1+\mathrm{i})$

1. أكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_c
2. (أ) أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_c-z_A}$ ، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها

(ب) حدّد طبيعة المثلث ABC

3. عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACDB$ معينا
4. T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (-1+\mathrm{i})z + 1 - 3\mathrm{i}$$

(أ) عيّن طبيعة التحويل T و عناصره المميزة

(ب) عيّن العبارة المركبة للتحويل $T\circ T$ ثم استنتج طبيعته و عناصره المميزة

13 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(z-3+2\mathrm{i})(z^2+6z+10) = 0$$

2. علّم النقط A ، C ، D و I ذات اللاحقات

$z_A = 3-2\mathrm{i}$ ، $z_C = -3+\mathrm{i}$ ، $z_D = -3-\mathrm{i}$ و $z_I = 1$

3. z عدد مركب يُحقق الجملة

$$\begin{cases} \arg(z-3+2\mathrm{i}) = \arg(z-1) + \dfrac{\pi}{2} \\ |z-3+2\mathrm{i}| = |z-1| \end{cases}$$

(أ) بيّن أنّ الجملة تُكافئ:

$$\frac{z-3+2\mathrm{i}}{z-1} = \mathrm{i}$$

ثمّ عيّن العدد المركب z

(ب) B هي النقطة ذات اللاحقة $z_B = 3$ ، تحقق أنّ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

(ج) لتكن J النقطة ذات اللاحقة $z_J = 1-2\mathrm{i}$

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب Z حيث :

$$Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}$$

تحقق أنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

14 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. L هو العدد المركب حيث : $L = (\sqrt{3}-1) + \mathrm{i}(\sqrt{3}+1)$

(أ) احسب L^2 ثم عيّن الطويلة و عمدة للعدد المركب L^2

(ب) استنتج الطويلة و عمدة للعدد L و اكتبه على الشكل المثلثي

(جـ) عيّن القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

(د) a هو العدد المركب حيث $a = \frac{L}{2+2\mathrm{i}}$. بيّن أنّ $a = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{6}}$

2. T هو التحويل النقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = -2az$

(أ) حدد طبيعة التحويل T و عناصره المميّزه

(ب) A و B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب $z_A = \sqrt{3}-\mathrm{i}$ ، $z_B = \sqrt{3}+\mathrm{i}$

عيّن لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتحويل T

3. $(\mathcal{E})$ هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z-\sqrt{3}+\mathrm{i}| = 2$

(أ) بيّن أنّ النقطة B نقطة من المجوعة $(\mathcal{E})$

(ب) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة $(\mathcal{F})$ صورة المجموعة $(\mathcal{E})$ بالتحويل T

15 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + z + 1 = 0$$

2. نعتبر النقط A ، B و M ذات اللاحقات : $z_A = -\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب. (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مُرافق z_A)

(أ) أُكتب z_A على الشكل الأسّي

(ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\arg[(z-z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

3. (أ) التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$$z' = z_A\, z + z_B\sqrt{3}$$

ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميّزة

(ب) التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$$z' = -2\, z + 3\mathrm{i}$$

عيّن نسبة و مركز التحاكي h

(جـ) نضع $S = h\circ r$ (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h)

عيّن طبيعة التحويل S مبرزا عناصره المميّزة، ثمّ تحقق أنّ عبارته المركبة هي : $z' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z-\mathrm{i}) + \mathrm{i}$

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i و النقط C ، D و E حيث $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$

بيّن أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية

5. (أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ مع θ عدد حقيقي

(ب) عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S

16 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الرسم 2cm)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(z-2\mathrm{i})(z^2-2z+2)=0$$

تُعطى الحلول على شكلها الجبري و الأسي (مع التبرير)

2. لتكن النقطتين A و B ذات اللاحقتين

$$z_A=1+\mathrm{i} \quad \text{و} \quad z_B=2\mathrm{i}$$

نرفق لكل عدد مركب z يختلف عن z_A العدد المركب:

$$z'=\frac{z-2\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}$$

(أ) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عدد تخيّلي صرف. عيّن و أنشئ المجموعة (E)

(ب) لتكن (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'|=1$. عيّن و أنشئ المجموعة (F)

3. ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(أ) أحسب لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران R و لاحقة النقطة I' صورة النقطة $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ بهذا الدوران.

(ب) ما هي صور كل من المجموعتين (E) و (F) بالدوران R.

17 في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. لتكن المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق:

$z=1-2\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ مع θ عددا حقيقيا

- ☐ (E) هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة $-1+2\mathrm{i}$
- ☐ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $-1+2\mathrm{i}$ و نصف قطرها 1
- ☐ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2\mathrm{i}$ و نصف قطرها 1
- ☐ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2\mathrm{i}$ و نصف قطرها $\sqrt{5}$

2. ليكن f التطبيق الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=-\mathrm{i}z-2\mathrm{i}$

- ☐ التطبيق f هو تحاكي
- ☐ النقطة ذات اللاحقة $-1-2\mathrm{i}$ هي سابقة للنقطة ذات اللاحقة i
- ☐ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $1+\mathrm{i}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$
- ☐ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $-1-\mathrm{i}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

3. لتكن المجموعة (F) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z-1+\mathrm{i}|=|z+1+2\mathrm{i}|$$

و ليكن A، B و C النقط ذات اللواحق $1-\mathrm{i}$، $-1+2\mathrm{i}$ و $-1-2\mathrm{i}$ على الترتيب

- ☐ النقطة C هي نقطة من المجموعة (F)
- ☐ (F) هي محور القطعة $[AB]$
- ☐ (F) هي محور القطعة $[AC]$
- ☐ (F) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$

4. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z+|z|^2=7+\mathrm{i}$. هذه المعادلة تقبل:

- ☐ حلين متمايزين حيث جزؤهما التخيّلي يساوي 1
- ☐ حلا حقيقيا
- ☐ حلين متمايزين حيث الجزء التخيّلي لأحدهما فقط يساوي 1
- ☐ حلا حيث جزؤه التخيّلي يساوي 2

18 **الجزء الأول** نقبل أنّه من أجل كل عددين مركبين غير معدومين z و z'، $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ \ [2\pi]$

برهن ما يلي: من أجل كل عددين مركبين غير معدومين z و z'، $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ \ [2\pi]$

الجزء الثاني المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الرسم 4cm)

نُسمي B النقطة ذات اللاحقة i و M_1 النقطة ذات اللاحقة:

$$z_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\mathrm{i})$$

1. نُذكر أنّه، من أجل كل عددين مركبين z و z'،

$$|zz'|=|z|\cdot|z'|$$

عيّن، باستعمال الجزء الأول، الطويلة و عمدة للعدد المركب z_1.

2. لتكن M_2 النقطة ذات اللاحقة z_2، صورة M_1 بالدوران الذي مركزه 0 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

عيّن الطويلة و عمدة للعدد المركب z_2.

أثبت أنّ النقطة M_2 تنتمي إلى المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته $y=x$.

3. لتكن M_3 النقطة ذات اللاحقة z_3، صورة M_2 بالتحاكي الذي مركزه 0 و نسبته $\sqrt{3}+2$.

(أ) أثبت أنّ $z_3=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+\mathrm{i})$.

(ب) أثبت أنّ النقطتين M_1 و M_3 تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

4. أنشئ النقط M_1، M_2 و M_3.

بكل نقطة M (تختلف عن B) من المستوي ذات اللاحقة z نرفق النقطة M'، ذات اللاحقة z' حيث $z'=\frac{1}{\mathrm{i}-z}$

عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث تكون M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها 0 و نصف قطرها 1.

حل تمارين و إرشادات

,,,