الاسم و اللقب:

BAC 2015

الأستاذ محمد سراي

الاستمرارية- الاشتقاقية
دراسة الدوال

- استمرارية دالة عند قيمة
- استمرارية دالة على مجال
- دالة الجزء الصحيح
- مبرهنة القيّم المتوسطة و تطبيقاتها
- تمارين

- قابلية اشتقاق دالة في قيمة
- التفسير البياني للعدد المشتق
- عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق
- الدالة المشتقة لمركب دالتين
- اتجاه تغير دالة على مجال
- القيّم الحدية المحلية لدالة على مجال
- نقطة الانعطاف

- دراسة نماذج لدوال عددية

الاستـــــــــمراريـــــــــة:

تعريف:

f دالة عددية معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و a عدد حقيقي غير معزول من المجال I.

الدالة f مستمرة عند a معناه: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$

مثال1:

الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = -3x^3 - 2x + 2$ مستمرة عند القيمة 1 لأنّ:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(-3x^3 - 2x + 2) = -3 = f(1)$$

مثال 2:

الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

إذا كان $x \le 1$ فإنّ $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-3}$ وإذا كان $x > 1$ فإنّ $f(x) = x - \dfrac{5}{4}$ ليست مستمرة عند القيمة 1 لأنّ:

من جهة: $f(1) = \dfrac{1^2-2}{1-3} = \dfrac{1}{2}$ ومن جهة أخرى $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\left(x - \dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$

نتائج:

- ✓ تكون دالة f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من قيّم هذا المجال.
- ✓ إذا كانت دالة f مستمرة على مجال I فإنّ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم هو خط متصل (غير متقطع).
- ✓ الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- ✓ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- ✓ الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- ✓ الدالتان cos و sin مستمرتان على $\mathbb{R}$.
- ✓ مجموع، جداء وتركيب دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

دالة الجزء الصحيح

تعريف:

دالة الجزء الصحيح هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x، العدد الصحيح n الذي يحقق: $n \le x < n+1$ ونرمز لها بالرمز: E أو $[\ ]$ أو Int ونكتب: $E(x) = \lfloor x \rfloor = Int(x) = n$

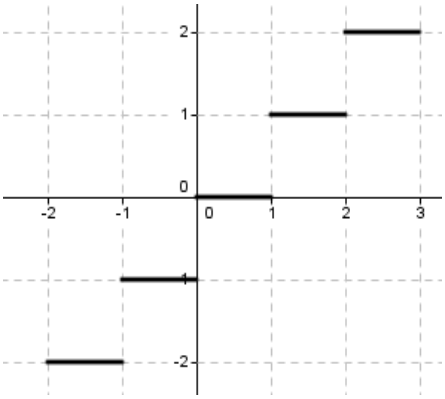
أمثلة:

$E(0.25) = 0$; $\lfloor 3.56 \rfloor = 3$; $Int(-1.25) = -2$; $E(-0.23) = -1$

- ✓ إذا كان $x \in [0;1[$ فإنّ $E(x) = 0$ ؛ إذا كان $x \in [-1;0[$ فإنّ $E(x) = -1$ ؛ إذا كان $x \in [1;2[$ فإنّ $E(x) = 1$

ملاحظة: a عدد صحيح. دالة الجزء الصحيح ثابتة على كل مجال من الشكل $[a, a+1[$

التمثيل البياني لدالة الجزء الصحيح



المستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

الشكل يوضح المنحنى البياني لدالة الجزء الصحيح على المجال $[-2; 3[$

ملاحظة: دالة الجزء الصحيح ليست مستمرة عند كل عدد صحيح.

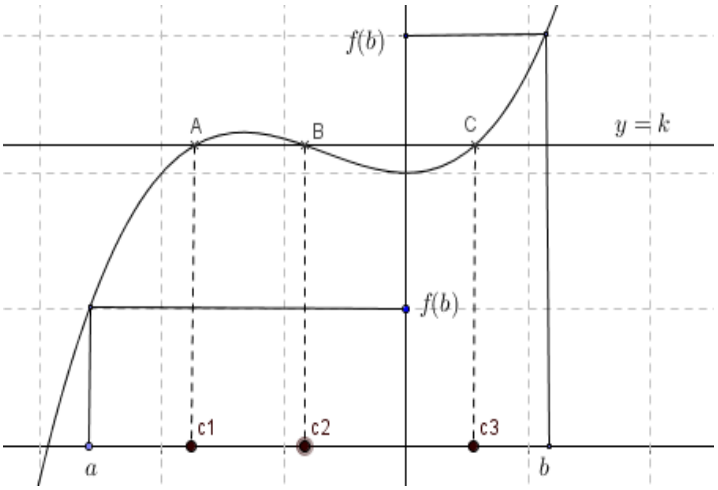
مبرهنة القيَم المتوسطة

مبرهنة

f دالة معرّفة و مستمرة على مجال $a;b$.من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ؛يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $a;b$ يحقق: $f(c)=k$

بمعنى آخر:

المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الاقل حلا في المجال $a;b$



التفسير البياني:

f دالة معرّفة و مستمرة على مجال $a;b$ ؛ (ζ) تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$ ؛(d) المستقيم ذو المعادلة $y=k$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ،

المستقيم (d) يقطع المنحنى (ζ) على الأقل في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b (لاحظ الشكل المقابل).

حالة خاصة:

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $a;b$ وكان $f(a).f(b)<0$ ،فإنّه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $a;b$ يحقق: $f(c)=0$ ،وهذا يعني بيانيا أنّ المنحنى (ζ) يقطع على الأقل محور الفواصل في نقطة فاصلتها c .

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $a;b$ ،فإنّ حل المعادلة $f(x)=k$ على المجال $a;b$ وحيد.

تذكير

- ✓ حصر عدد حقيقي α معناه ايجاد مجال يشمل α
- ✓ سعة الحصر هي طول المجال.
- ✓ طول المجال $[a,b]$ هو العدد الحقيقي الموجب $b-a$
- ✓ كل معادلة من الشكل: $f(x)=g(x)$ هي معادلة مكافئة للمعادلة $h(x)=0$ حيث: $h(x)=f(x)-g(x)$

تمرين محلول:

f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $]2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{5}{x-2}$; $f(x)=\sqrt{x}$

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين.

بيّن أنّ (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث: $4<x_0<5$

حل:

تبيين أنّ (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث: $4<x_0<5$

نبيّن أنّ المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[4;5]$.

المعادلة $f(x)=g(x)$ مكافئة للمعادلة $f(x)-g(x)=0$.

نضع : $h(x)=f(x)-g(x)$ ، أي: $h(x)=\sqrt{x}-\dfrac{5}{x-2}$

الدالة h مستمرة على المجال $[4;5]$ كمجموع دالتين مستمرتين.

حساب $h(4)$ و $h(5)$:

$h(4)=-\dfrac{1}{2}$ ، $h(5)=\sqrt{5}-\dfrac{5}{3}>0$ ،لدينا إذن $h(4).h(5)<0$

الدالة h متزايدة تماما على المجال $[4;5]$ لأنّ : $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{5}{(x-2)^2}$ أي $h'(x)>0$ على $[4;5]$.

نتيجة:

المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[4;5]$ وبالتالي (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث: $4<x_0<5$.

تمرين محلول:

g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1)أنجز جدول تغيرات الدالة f

2)بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.تأكد أنّ $\alpha\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$

حل:

جدول التغيرات:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ -2	↗	$+\infty$

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ ولدينا: $f(x)\in]-2;+\infty[$ وبما أنّ $0\in]-2;+\infty[$ و f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ ، فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

التأكد أنّ $\alpha\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$:لدينا: $f(0)=-1$ ، $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{11}{8}$ إذن $f(\dfrac{1}{2}).f(0)<0$ وبالتالي: $\alpha\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$

تمارين للحل :

الاستمرارية

التمرين الأول:

أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة a في الحالتين الآتيتين:

1) إذا كان $x \neq 1$ فإنّ $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x-1}$ و $f(1) = -2$ ؛ $a = 1$

2) إذا كان $x < 0$ فإنّ $f(x) = \sqrt{-x}$ و إذا كان $x \geq 0$ فإنّ $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $a = 0$

التمرين الثاني:

a و b عددان حقيقيان. f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

إذا كان $x < 2$ فإنّ: $f(x) = x^2 + 2x + a$ وإذا كان: $x \geq 2$ فإنّ: $f(x) = \dfrac{2x^2 + b - a}{x}$

عيّن علاقة بين العددين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2 .

التمرين الثالث:

f و g الدالتان المعرّفتان على $[-1;1[$ كالآتي: $f(x) = x^2.E(x)$ ؛ $g(x) = x^2 + E(x)$

1) هل الدالة f مستمرة عند 0 ؟هل الدالة g مستمرة عند 0 ؟ (مع التبرير).

2) عيّن مجالا تكون فيه الدالة g مستمرة.

3) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$.

مبرهنة القيّم المتوسطة

التمرين الأول:

1) بيّن أنّ المعادلة: $-x^3 + 3x^2 = 3$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

2) بيّن أنّ المعادلة: $\dfrac{1}{2}\sin x + 2 = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0; \pi]$.

التمرين الثاني:

نعتبر الدالتين $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g : x \mapsto -x^3$ ، بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $-\dfrac{7}{8} < x_0 < -\dfrac{3}{4}$.

التمرن الثالث:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 5$

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

2) احسب من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) بيّن أنّ المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ،ثمّ عيّن حصرا سعته $0,5$ للعدد α .

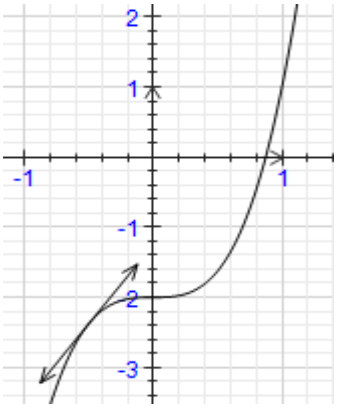
5) عيّن من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة $f(x)$.

الاشتقاقية

تعريف 1:

f دالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a عنصر من I . (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f قابلة للاشتقاق في القيمة a معناه : للنسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية منتهية عندما يؤول x إلى a .



و نكتب: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

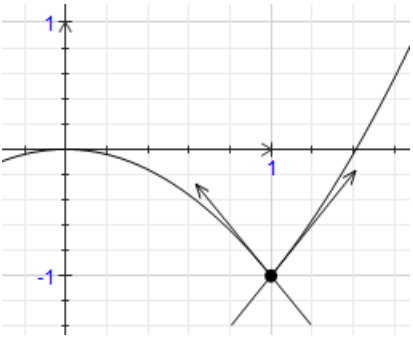
التفسير البياني:

المنحنى (C) يقبل مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ معادلة له:

$$y=f'(a)x+f(a)-af'(a)=f'(a)(x-a)+f(a)$$

إذا كانت للنسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايتين منتهيتين مختلفتين l_1 و l_2 عندما يؤول x إلى a ، فإنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق في القيمة a .

التفسير البياني :

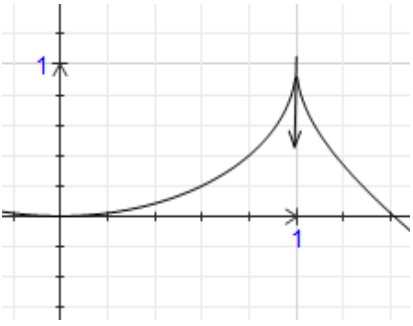


المنحنى (C) يقبل في النقطة $S(a,f(a))$ مماسين معامل توجيه كل واحد منهما l_1 و l_2.النقطة S تسمى نقطة زاوية.

إذا كانت للنسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية غير منتهية عندما يؤول x إلى a ،فإنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق في القيمة a .

التفسير البياني :

المنحنى البياني للدالة f يقبل في النقطة $S(a,f(a))$ مماسا موازلحامل محور التراتيب.



تعريف مكافئ:

f دالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a عنصر من I.

f قابلة للاشتقاق في القيمة a معناه : للنسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية منتهية عندما يؤول h إلى 0 و نكتب: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

نقطة الانعطاف:

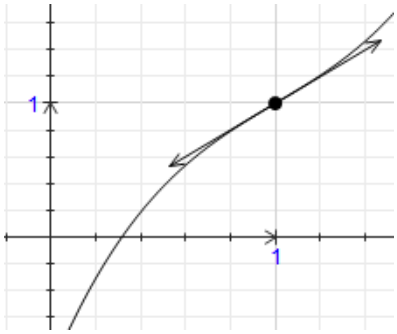
تعريف:

نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني.

مبرهنة:

a عدد حقيقي. f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل a. f'' دالتها المشتقة الثانية على المجال I

إذا كان $f''(a)=0$ و غيّر $f''(x)$ إشارته بجوار العدد a ،على المجال I ؛ فإنّ النقطة $S(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

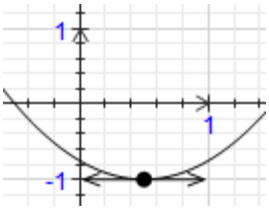


القيمة الحدّية المحلية:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. k عدد حقيقي. a عدد حقيقي من I. (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الدالة f تقبل القيمة k قيمة حدّية محلية من أجل القيمة a للمتغير x إذا و فقط إذا تحقق:

1) $f(a)=k$.
2) $f'(a)=0$
3) $f'(x)$ يغير إشارته بجوار a .



التفسير البياني:

في النقطة ذات الفاصلة a ، المماس للمنحنى موازٍ لحامل محور الفواصل.

عمليات على المشتقات:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. الدالة g لا تنعدم على I

الدالة	$f+g$	$f\times g$	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
الدالة المشتقة	$f'+g'$	$f'\times g+g'\times f$	$\frac{-g'}{g^2}$	$\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$

الدالة المشتقة لمركب دالتين:

إذا قبلت دالة f الاشتقاق على مجال I ، وقبلت دالة g الاشتقاق على المجال $f(I)$ ، فإنّ الدالة gOf تقبل الاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $(gOf)'(x)=f'(x).g'[f(x)]$.

مثال:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

احسب باستعمال مركب دالتين $f'(x)$.

حل:

نضع:

$u(x)=3x^2+1$ وبالتالي $u'(x)=6x$

و $v(x)=\sqrt{x}$ وبالتالي: $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

لدينا: $f(x)=(vOu)(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x)=u'(x)\times v'\big(u(x)\big)$$

$$f'(x)=6x\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$f'(x)=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

نتائج:

نتيجة 1:

f دالة معرّفة ، موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I .الدالة g المعرّفة بالعبارة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I و لدينا: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

نتيجة 2:

n عدد صحيح. f دالة معرّفة و قابلة للاشتقاق على مجال I .الدالة g المعرّفة بالعبارة: $g(x)=\left[f(x)\right]^n$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $g'(x)=n\times f'(x)\times\left[f(x)\right]^{n-1}$

مثال:

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ احسب $f'(x)$ حيث: $f(x)=\left(x^2-3x+2\right)^4$

نضع: $u(x)=x^2-3x+2$ وبالتالي: $u'(x)=2x-3$ و لدينا: $f(x)=\left[u(x)\right]^4$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=4u'(x)\left[u(x)\right]^3$ أي:

$$f'(x)=4(2x-3)\left(x^2-3x+2\right)^3$$

اتجاه تغير دالة و إشارة المشتق:

مبرهنة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I : $f'(x)\geq 0$ ، الدالة f متزايدة تماما على I .

إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I : $f'(x)=0$ ، الدالة f ثابتة على I .

إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I : $f'(x)\leq 0$ ، الدالة f متناقصة تماما على I .

مثال:

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$

ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها،

حل:

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها و لدينا: $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ مبينة كالآتي:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $[0;1[$ و $]1;2]$

تذكير :

مركز التناظر:

$A(a,b)$ **مركز تناظر لمنحنى دالة** f **معرّفة على مجموعة** I **معناه:**

$$(2a-x)\in I \text{ و } f(x)+f(2a-x)=2b$$

أو:

$A(a,b)$ **مركز تناظر لمنحنى دالة** f **معرّفة على مجموعة** I **معناه:**

$$(a+x)\in I ; (a-x)\in I \text{ و } f(a+x)+f(a-x)=2b$$

محور التناظر:

يكون مستقيم معادلة له: $x=a$ **محور تناظر لمنحنى دالة** f **معرّفة على مجموعة** I **إذا و فقط إذا كان:**

$$(a+x)\in I ; (a-x)\in I \text{ و } f(a+x)=f(a-x)$$

أو:

يكون مستقيم معادلة له: $x=a$ **محور تناظر لمنحنى دالة** f **معرّفة على مجموعة** I **إذا و فقط إذا كان:**

$$x\in I ; (2a-x)\in I \text{ و } f(x)=f(2a-x)$$

الدالة الدورية:

T **عدد حقيقي.** f **دالة عددية معرّفة على مجموعة** I **.**

(C_f) **تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس** $(O,\vec{i};\vec{j})$ **.**

تكون الدالة f **دورية و دورها** T **، إذا و فقط إذا تحقق:**

1) $x\in I ; (x+T)\in I$

2) $f(x+T)=f(x)$

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f **دورية و دورها** T **، يكفي دراستها على مجال طوله** T **، و يستنتج تمثيلها البياني على المجموعة** I **بالانسحاب الذي شعاعه** $\vec{v}$ **حيث:** $\vec{v}=T\vec{i}$

دراسة مثال:

f **الدالة العددية المعرّفة على** $\mathbb{R}$ **كما يلي:** $f(x)=\cos^2(x)$ **،** (C_f) **تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس** $(O,\vec{i};\vec{j})$ **.**

1) **احسب :** $f(x+\pi)$ **.ماذا تستنتج بالنسبة للدالة** f **؟فسّر النتيجة بيانيا.**

2) **احسب** $f(-x)$ **،و فسّر النتيجة بيانيا.**

3) **باستعمال مركب دالتين ،احسب** $f'(x)$ **و حدّد إشارتها على المجال** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **.**

4) **أنجز جدول تغيرات الدالة** f **، ثمّ أنشئ المنحنى** (C) **.**

حل:

1) $f(x+\pi)=\cos^2(x+\pi)=\cos(x+\pi).\cos(x+\pi)=(-\cos(x))(-\cos(x))=\cos^2(x)=f(x)$

الدالة f **دورية وأصغر دور لها هو** $T=\pi$ **يكفي دراستها على مجال طوله** π **،مثلا المجال** $[0,\pi]$ **.**

يستنتج تمثيلها البياني على $\mathbb{R}$ **بالانسحاب الذي شعاعه** $\vec{v}=\pi\vec{i}$

2) $f(-x)=\cos^2(-x)=\cos(-x)\cos(-x)=\cos(x)\cos(x)=\cos^2(x)=f(x)$

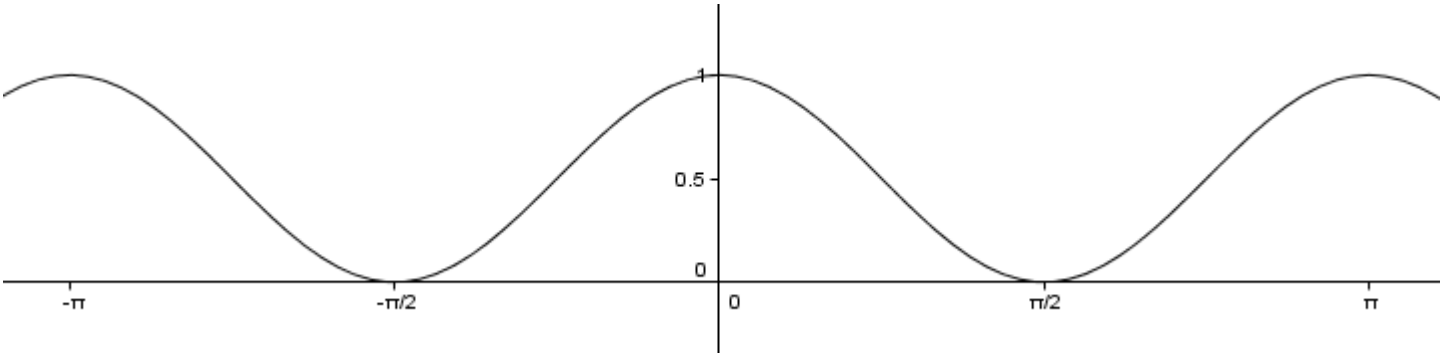
الدالة f **زوجية ، تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب، يكفي دراستها على المجال** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **.**

3) **نضع:** $u(x)=x^2$; $v(x)=\cos(x)$ **و بالتالي :** $f(x)=(uOv)(x)$

$f'(x) = -2\sin(x).\cos(x)$. ويكون من أجل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ؛ $f'(x) \leq 0$ (لأنّ: $\cos x \geq 0$ و $\sin x \geq 0$)

جدول التغيرات و الإنشاء:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	0



التمثيلات البيانية:

(P) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f دالة عددية معرّفة على مجموعة D_f من مجموعة الأعداد الحقيقية. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي (P).

المنحنى (C_f) معرّف كما يلي: $(C_f) = \{M(a,b) \in (P) : a \in D_f \wedge b=f(a)\}$

تقاطع المنحنى مع حامل محور الفواصل:

نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل هي كل نقطة A فاصلتها 0 و ترتيبها $f(0)$.

إذا كان $0 \notin D_f$ ، فإنّ المنحنى (C_f) لا يقطع حامل محور الفواصل،

تقاطع المنحنى مع حامل محور التراتيب:

نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب هي كل نقطة A ترتيبها 0 و فاصلتها x تحقق المعادلة $f(x)=0$

التمثيلات البيانية للدوال من الشكل: $f+k$

للدالتين f و $(f+k)$ نفس اتجاه التغير على مجال I من $\mathbb{R}$.

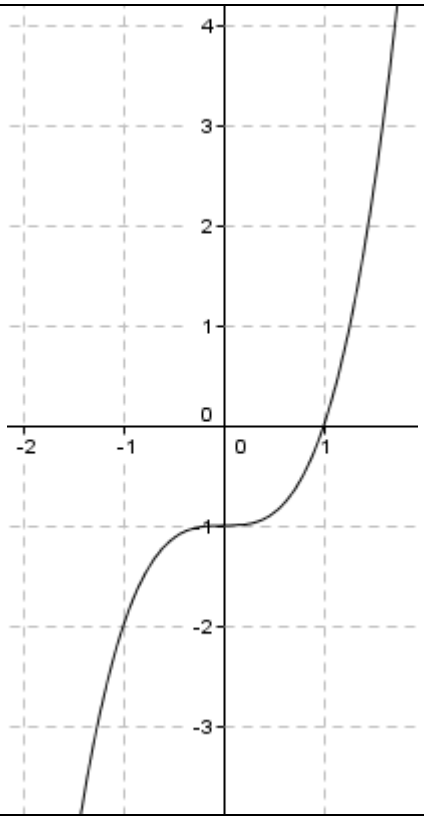
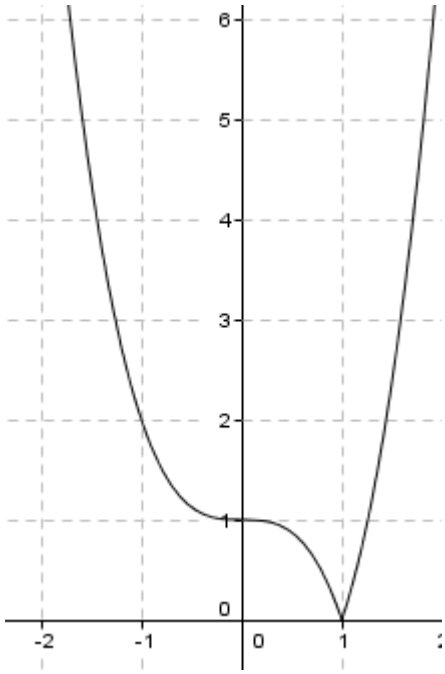
التمثيل البياني (C_{f+k}) للدالة $(f+k)$ يستنتج انطلاقا من المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} = k\vec{j}$

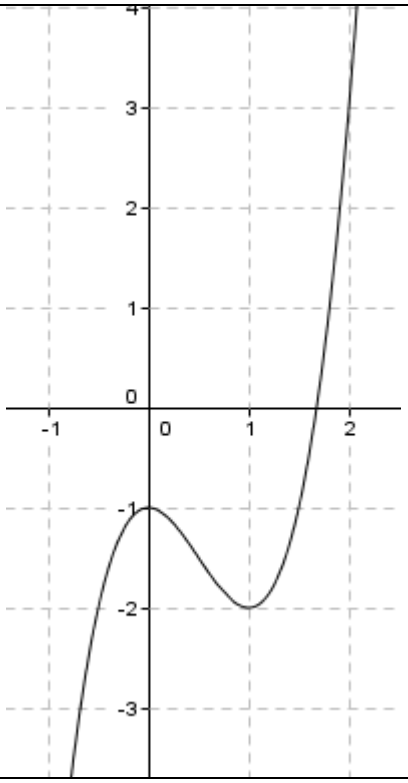
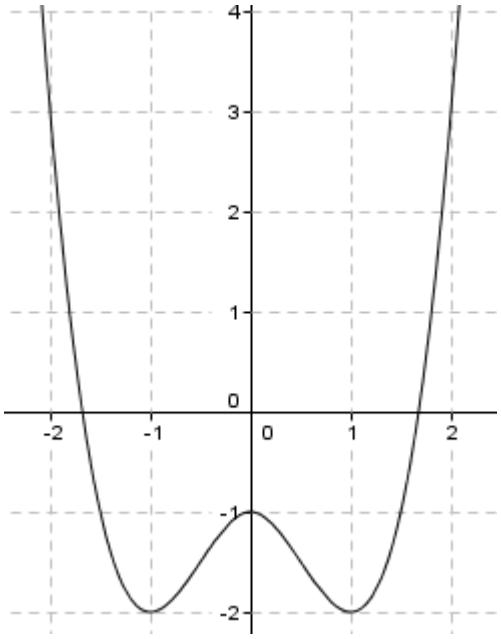
التمثيل البياني للدوال من الشكل: $x \mapsto g(x) = f(x+b)+k$

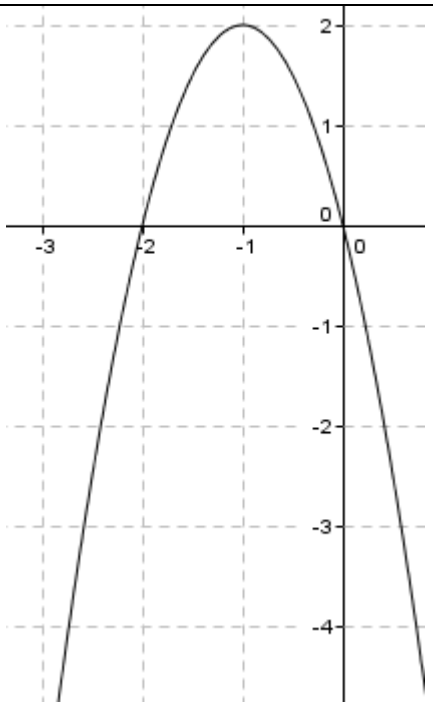
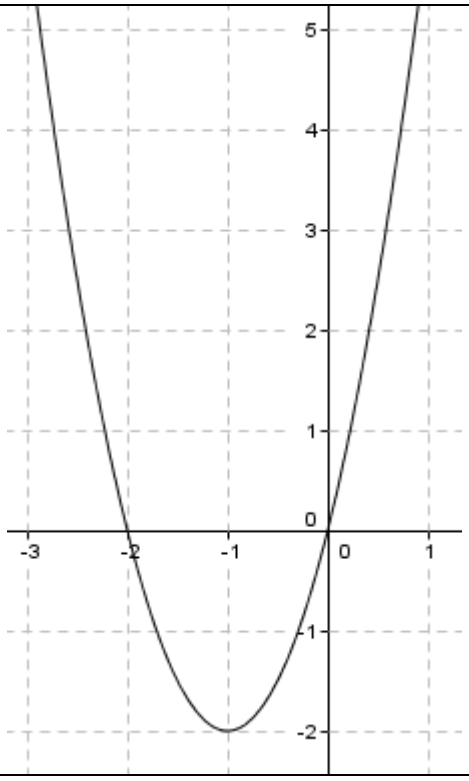
التمثيل البياني (C_g) للدالة g يستنتج انطلاقا من المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} = -b\vec{i}+k\vec{j}$.

الدالة	المنحنى البياني
الدالة الزوجية	تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب
الدالة الفردية	تمثيلها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ O.
الدالة g المعرّفة بـ: $g(x)=-f(x)$	تمثيلها البياني نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل.
الدالة g معرّفة بـ: $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ في هذه الحالة نكتب $g(x)$ على الشكل: $g(x)=\begin{cases} f(x) \dots\dots\dots\dots f(x)\geq 0 \\ -f(x)\dots\dots\dots\dots f(x)\leq 0 \end{cases}$	في المجالات التي يكون فيها $f(x)\geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f) و إذا كان $f(x)\leq 0$ يكون (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.
الدالة g معرّفة بـ: $g(x)=f(\lvert x\rvert)$ الدالة g زوجية فمن أجل $x\geq 0$ لدينا $g(x)=f(x)$	(C_g) منطبق على (C_f) إذا كان $x\geq 0$ ثمّ نكمل الإنشاء بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

أمثلة :المنحنيات البيانية

التمثيل البياني للدالة f	التمثيل البياني للدالة $\lvert f\rvert$
	

التمثيل البياني للدالة f	التمثيل البياني للدالة g حيث: $g(x)=f(\lvert x\rvert)$
	

التمثيل البياني للدالة f	التمثيل البياني للدالة g حيث: $g(x)=-f(x)$
	

تمارين للحل :

الاشتقاقية في قيمة

التمرين الأول:

أدرس قابليّة اشتقاق الدالّة f في القيمة a في الحالات الآتية ثمّ فسّر كل نتيجة هندسيا:

1) f الدالّة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=x\sqrt{x}$ ؛ $a=0$

2) f الدالّة المعرّفة على $]-\infty;1]$ بالعبارة : $f(x)=\sqrt{1-x}$ ؛ $a=1$

3) f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=3x+\left|x^2-4\right|$ ؛ $a=-2$

التمرين الثاني:

f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

1) تحقق أنّه من أجل كل h غير معدوم يكون : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{3h+6}{\sqrt{3h^2+6h+4}+2}$.

2) برهن أنّ الدالّة f تقبل الاشتقاق في القيمة 1.

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1

التمرين الثالث:

f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

إذا كان $x\neq 0$ فإنّ $f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ و $f(0)=0$

1) بيّن أنّ f مستمرة عند 0 .

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالّة f في القيمة 0 .

التمرين الرابع:

f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

إذا كان $x\neq 0$ فإنّ $f(x)=\dfrac{\cos 2x-1}{x}$ و $f(0)=0$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $\dfrac{f(x)}{x}=-2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$.

2)استنتج أنّ الدالّة f قابلة للاشتقاق في القيمة 0 .

التمرين الخامس:

f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

إذا كان : $x\geq 2$ فإن : $f(x)=(x-2)\sqrt{x-2}$

وإذا كان $x<2$ فإنّ: $f(x)=x^2+kx+2$

(C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) عيّن قيمة العدد الحقيقي k حتى تكون الدالّة f مستمرة عند 2.

2) أ) من أجل قيمة k المحصل عليها في السؤال السابق، ادرس قابلية اشتقاق الدالّة f في القيمة 2 .

ب) فسّر النتيجة بيانيا

تمارين محلولة خاصة بمعادلة المماس

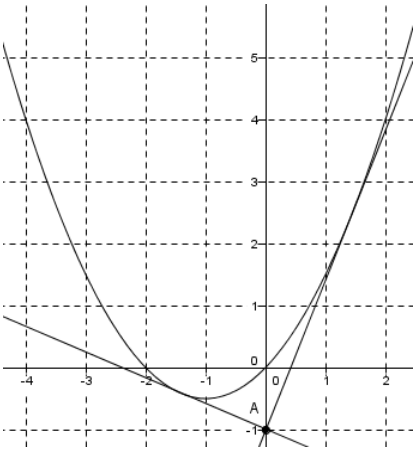
التمرين الأول:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$.

1) بيّن أنّه يوجد مماسان (T_1) و (T_2) لمنحنى الدالة f يمران بالنقطة $A(0;-1)$.

2) اكتب معادلة لكل من (T_1) و (T_2).

3) بيّن أنّ (T_1) و (T_2) متعامدان.



حل:

المماس لمنحنى الدالة f في نقطة $K(a,f(a))$ يمر بالنقطة $A(0;-1)$ معناه

$$\boxed{-1=f'(a)(0-a)+f(a)\rightarrow 1=af'(a)-f(a)}$$

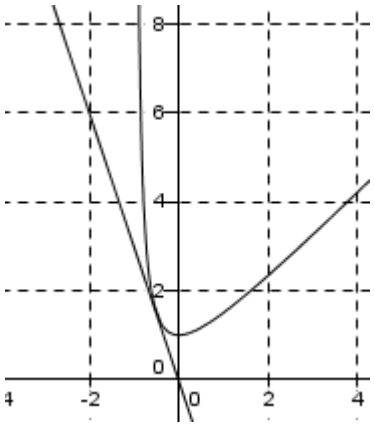
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x \;;\; f'(x)=x+1$$

$$1=a(a+1)-\frac{1}{2}a^2-a$$

$$\frac{1}{2}a^2=1\rightarrow a=\sqrt{2}\vee a=-\sqrt{2}$$

التمرين الثاني:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.



1) احسب $f'(x)$.

2) بيّن أنّ يوجد مماس وحيد لمنحنى الدالة f يمر بالمبدأ.

3) اكتب معادلة لهذا المماس

حل:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

المماس لمنحنى الدالة f في نقطة $K(a,f(a))$ يمر بالمبدأ معناه:

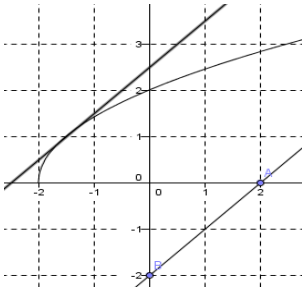
$$f(a)-af'(a)=0$$

ومنه: $\frac{2a+1}{(a+1)^2}=0\rightarrow a=-\frac{1}{2}$

إذن يوجد مماس وحيد لمنحنى الدالة f في النقطة $K(-\frac{1}{2},f(-\frac{1}{2}))$ يمر بالمبدأ، معادلة له: $y=-3x$

التمرين الثالث:

f الدالة العددية المعرّفة على $]-2;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\sqrt{2x+4}$



1) احسب $f'(x)$

2) بيّن أنّ يوجد مماس وحيد (T) لمنحنى الدالة f يوازي المستقيم (d) ذو المعادلة:

$$x-y-2=0$$

3) اكتب معادلة للمماس (T).

4) بيّن أنّ المستقيم (T') ذا المعادلة $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$ مماس لـ (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثييها.

تمارين حول القيمة الحدية و نقطة الانعطاف

التمرين الأول:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x^3+12x^2+1$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f.

2) هل الدالة f تقبل قيما حدّية محلية ؟إذا كان الجواب نعم ،أذكرها.

التمرين الثاني:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-x^3+3x+1$ ،

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(0,1)$.

2) ادرس حسب قيّم العدد الحقيقي x ، إشارة : $f(x)-3x-1$.فسّر النتيجة بيانيا

3) برهن بطريقة ثانية أنّ النقطة A هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

حل:

1) معادلة المماس: $y=3x+1$

2) إشارة : $f(x)-3x-1$ ؛ $f(x)-3x-1=-x^3$ ومنه:

$f(x)-3x-1>0$ إذا كان $x<0$ و $f(x)-3x-1<0$ إذا كان $x>0$.

المماس (T) يخترق المنحنى (C_f).النقطة $A(0,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

3) $f''(x)=-6x$ ، $f''(x)=0$ معناه $x=0$ ، $f''(x)$ يغير إشارته بجوار 0. و منه النقطة $A(0,1)$ نقطة انعطاف.

التمرين الثالث:

a و b عددان حقيقيان.

f الدالة العددية المعرفة على $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـ : $f(x)=ax+\frac{b}{4x+2}$ ، (C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) برّر أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f .

ب) عين العددين a و b بحيث : $f'(0)=\frac{7}{2}$ و $f(0)=-\frac{3}{2}$.

حل:

1) أ) الدالة f دالة ناطقة فهي تقبل الاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها.

ب) تعيين العددين a و b: لدينا أوّلا: $f'(x)=a-\frac{4b}{(4x+2)^2}$

$f(0)=-\frac{3}{2}$ معناه $\frac{b}{2}=\frac{-3}{2}$ و منه $\boxed{b=-3}$

$f'(0)=\frac{7}{2}$ معناه $a-b=\frac{7}{2}$ و منه $a=\frac{1}{2}$

و تكون عبارة الدالة f هي إذن: $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4x+2}$

تمارين مختلفة في دراسة الدوال

التمرين الأول

f الدالة العددية المعرفة على D_f حيث: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$

(C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$

2) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب) استنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

ج) (d) المستقيم ذو المعادلة $y=3$. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (d).

3) احسب $f'(x)$، استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أ) بيّن أنه من أجل كل x من D_f: $f(-3-x)=f(x)$. ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة للمنحنى (C)؟

ب) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل و محور التراتيب.

ج) أنشئ المنحني (C) ومستقيماته المقاربة.

5) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $u_n=3-f(n)$

أ) احسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_2$.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to\infty}(n.S_n)$.

التمرين الثاني

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :. $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

2) أ) بيّن أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنّ: $f'(x)=\dfrac{-6x(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3}$.

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f .استنتج حصرا لـ $f(x)$.

3) أ) بيّن أنّ النقطة $w\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ مركز التناظر للمنحنى (C).

ب) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة w.

4) أ) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C) مع كل من محور الفواصل والتراتيب.

ب) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C).

5) m وسيط حقيقي.

أ) (d_m) مستقيم معادلة له: $y = 2mx + m$. بيّن أنّ (d_m) يشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيتيها.

ب) ناقش بيانيا، حسب قيّم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x الآتية: $f(x) = 2mx + m$.

6) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = \dfrac{|2x+1|}{\left(x^2+x+1\right)^2}$، (C') تمثيلها البياني.

اكتب دون رمز القيمة المطلقة العبارة $g(x)$ ثمّ استنتج إنشاء المنحنى (C') انطلاقا من المنحنى (C).

التمرين الثالث

I) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بالعبارة .: $f(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

(C) المنحني البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل:

$f(x) = 1 + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-3}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجموعة تعريفها.

ج) عيّن بمعادلاتها المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

2) أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ أنجز جدول تغيراتها.

ب) أكتب معادلة لمماس المنحني (C) في نقطته ذات الفاصلة 5.

3) أ) أثبت أن المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور التناظر للمنحني (C).

ب) أنشئ المنحني (C) و مستقيماته المقاربة.

ج) k عدد حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيّم k عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x الآتية:

$$(k-1)x^2 - 2x(k-1) - 3(k-5) = 0$$

II) m وسيط حقيقي. f_m الدالة العددية المعرّفة بالعبارة: $f_m(x) = \dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$، (C_m) تمثيلها البياني.

1) حل في المجموعة $\mathbb{R}$، المعادلة ذات المجهول x: $x^2 - mx - 3 = 0$ ، ثمّ استنتج D مجموعة تعريف الدالة f_m

2) أ) بيّن أنّ يمكن كتابة $f_m(x)$ بالشكل: $f_m(x) = 1 - \dfrac{12}{x^2-mx-3}$

ب) ادرس على المجموعة D إشارة $\left(x^2-mx-3\right)$، ثمّ احسب نهايات الدالة f_m عند حدود المجموعة D.

3) أ) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة D: $f_m'(x)=\dfrac{12(2x-m)}{\left(x^2-mx-3\right)^2}$

ب) أدرس إشارة $f_m'(x)$ ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f_m.

4) أ) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيتيها.

ب) ما هو المنحنى البياني (C_m) الذي يشمل النقطة $S(1;4)$.

التمرين الرابع

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

ب) استنتج أنّ المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل واحد منهما.

2) احسب $f'(x)$ و حدّد إشارتها على المجال $]0;+\infty[$.أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3) أ) (d) المستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$. أدرس الوضع النسبي للمستقيم (d) و المنحنى (C).

ب) أنشئ المنحنى (C) و مستقيماته المقاربة.

4) m وسيط حقيقي. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=m$.

أ) ناقش بيانيا عدد نقط تقاطع المستقيم (Δ) و المنحنى (C).

ب) نفرض أنّ $m>\sqrt{2}$، نسمى A و B نقطتي تقاطع (Δ) و (C)، فاصلتيهما على الترتيب x_A و x_B.

برهن أنّ $x_A\times x_B=\dfrac{3}{2}$.

ج) برهن أنّ منتصف القطعة $[AB]$ ينتمي لمستقيم يطلب تعيين معادلة له.

التمرين الخامس

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=x^3+3x+8$

1) أ) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x، احسب $g'(x)$ و عيّن إشارتها.

2) أ) أنجز جدول تغيرات الدالة g.

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$,تأكد أنّ $\alpha\in]-2;-1[$.

ج) استنتج حسب قيّم العدد الحقيقي x،إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

1) أ) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$ ،

حيث: a، b، c و d أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج) استنتج أنّ المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) يطلب تعيين معادلة له.

د) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (d).

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x ،احسب $f'(x)$ و تأكد أنّ : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

ب) استنتج دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

ج) أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) أنشئ بعناية المنحنى (C) و مستقيمه المقارب.

4) m وسيط حقيقي.

أ) عيّن قيّم m حتى تقبل المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول مختلفة نرمز لها بالرمز x_1، x_2 و x_3.

ب) بيّن أنّ : $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=0$.

5) h الدالة العددية المعرّفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $h(x)=f\left(\sin x\right)$

عيّن $h'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة h.

التمرين السادس

f الدالة العددية المعرّفة على المجال I حيث: $I=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ بالعبارة: $f(x)=\frac{2}{3-2x}+\sqrt{x-1}$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) احسب من أجل كل حقيقي x من المجال I، $f'(x)$ ثمّ عيّن إشارتها.

3) أ) أنجز جدول تغيرات الدالة f.

ب) استنتج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال I.

ج) تحقق أنّ: $2\le\alpha\le 2,5$.

د) عيّن إشارة $f(x)$ على المجال I.

4) أ) A و B نقطتان من المنحنى (C) فاصلتيهما على الترتيب 2 و 2,5. عيّن معادلة للمستقيم (AB).

ب) C نقطة تقاطع المستقيم (AB) و محور الفواصل. عيّن β فاصلة النقطة C. ثمّ احسب قيمة مقربة لـ $f(\beta)$.

ج) قارن بين α و β.

5) انشئ بدقة (C) و المنحنى البياني للدالة g المعرّفة على المجال I بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

6) m وسيط حقيقي. عيّن قيّم m حتى تقبل المعادلة $g(x)=2m-1$ حليّن مختلفين.

التمرين السابع

f الدالة العددية المعرّفة بالعبارة. $f(x)=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$. (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حدّد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من D_f، قارن بين $f(x+2\pi)$ و $f(x)$ ثمّ بين $f(-x)$ و $f(x)$.

ب) استنتج أنّ يمكن دراسة الدالة f على المجال $]0;\pi]$.

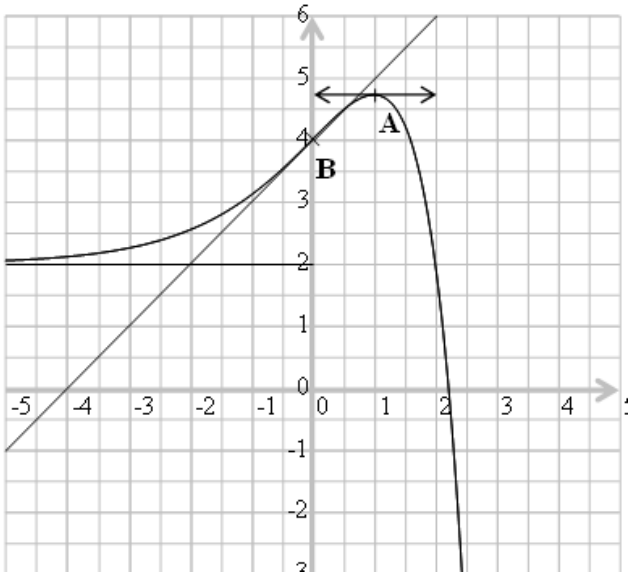
3) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f(x)=2\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. استنتج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4) احسب $f'(x)$ و عيّن إشارتها ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;\pi]$.

5) أنشئ بدقة المنحنى (C) في المجال $]0;2\pi[$.

التمرين الثامن

f دالة عددية معرّفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) للدالة f



نعلم أنّ:

- المستقيم ذو المعادلة: $y=2$ مقارب لـ (C) بجوار $(-\infty)$.
- المماس لـ (C) في النقطة A ذات الفاصلة 1 موازٍ لمحور الفواصل.
- النقطة $B(0;4)$ نقطة من المنحنى (C).

1) بقراءة بيانية :

أ) ما هي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؟

ب) عيّن $f'(1)$ و $f'(0)$.

ج) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة B.

د) حل بيانيا في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $f'(x)>0$ ،

هـ) العدد الحقيقي α الذي يحقق: $f(\alpha)=0$,عيّن حصرا سعته $0,5$ للعدد α ،ثمّ استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) h الدالة العددية المعرّفة على $[-1;5]$ بالعبارة: $h(x)=f(-2x+4)$.

أ) احسب $h'(2)$.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;5]$، احسب $h'(x)$ و حدّد إشارتها.

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $[-1;5]$ بطريقتين مختلفتين.

التمرين التاسع

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αحيث: $0,7<\alpha<0,8$

ب) استنتج حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$.

(C_f)تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّ من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيّم x ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f (نأخذ $f(\alpha)\approx -0,1$)

4) احسب $f(1)$ ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

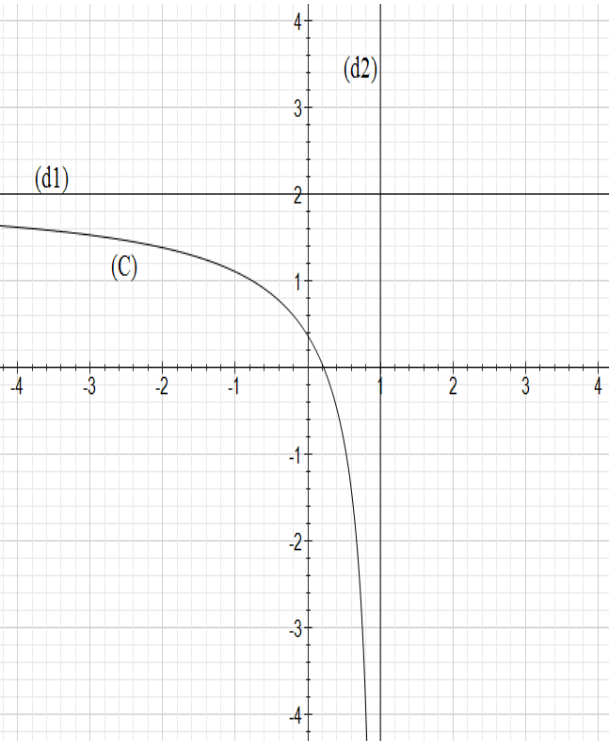
أ) تحقق أنّ من أجل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثمّ أنشئ (C_h).

التمرين العاشر

الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة عددية f معرّفة على المجال $]-\infty,1[$.

المستقيمان (d_1) و (d_2) مستقيمان مقاربان لمنحنى الدالة f حيث (d_1) هو المستقيم الموازي لمحور الفواصل، و (d_2) هو المستقيم الموازي لمحور التراتيب.



1) بقراءة بيانية:

أ)حدّد نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة من مجال تعريفها.

ب)عيّن حصرا سعته 0.5 للعدد a الذي يحقق $f(a)=0$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$ على $]-\infty,1[$.

ج)شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty,1[$ كما يلي: $g(x)=|f(x)|$

أ) باستعمال المنحنى البياني للدالة f ،بيّن كيف ينشآ المنحنى البياني للدالة g و أنشئه.

ب) عيّن بيانيا مجموعة قيّم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $g(x)=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

3) h الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty,1[$ كما يلي: $h(x)=f(2x-1)$

أ) بيّن أنّ الدالة h مركب دالتين إحداهما الدالة f يطلب تعيين عبارة الدالة الأخرى.

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $]-\infty,1[$و شكّل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أنّ $h(\frac{a+1}{2})=0$ و أنّ $h'(\frac{a+1}{2})=2f'(a)$

د) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة h في النقطة ذات الفاصلة $\frac{a+1}{2}$.

التمرين الحادي عشر

الجزء الأول:

g الدالة المعرفة على المجموعة D_g حيث: $D_g=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x^2-4)\sqrt{x^2-4}-4$

1) أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية على D_g . فسّر نتيجتك هندسيا.

ب) احسب نهايات الدالة g عند الحدود المفتوحة من مجموعة تعريفها.

2) أ) احسب $g'(x)$ و حدّد إشارتها على المجال $]2;+\infty[$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2;+\infty[$.تأكد أنّ $\alpha\in[2;3]$.استنتج حصرا للحل الآخر

4) حدّد إشارة $g(x)$ على D_g.

الجزء الثاني:

f الدالة المعرفة على المجموعة D_f حيث: $D_f=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بيّن أن الدالة f فردية على D_f .

2) احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة من المجموعة D_f.

3) أ) احسب $f'(x)$ و استنتج إشارتها على D_f.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ب) حدّد وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ).

4) باستعمال نتيجة السؤال 1) استنتج أنّ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة h المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $h(x)=-f(x)$

عيّن المستقيمات المقاربة للمنحني (C').