التمرين الأول

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]e;+\infty[$ لأنّها مجموع دالتين قابلتان للاشتقاق و لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}}{2x}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $2-\sqrt{x}$، و عليه:

f متناقصة تماما على المجال $]e;4]$ و متزايدة تماما على المجال $[4;+\infty[$. و تقبل الدالة f عند 4 قيمة كبرى هي $f(4)=\ln 4-2$

2. بما أنّ $\ln 4-2<0$ فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $\ln x-\sqrt{x}<0$ أي $\ln x<\sqrt{x}$

الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]e;+\infty[$ و منه:

من أجل كل عدد حقيقي $x>e$ لدينا $\ln x>\ln e$ أي $\ln x>1$

3. من أجل $x>e$ لدينا $\ln x<\sqrt{x}$ و $\ln x>1$ أي $1<\ln x<\sqrt{x}$. بقسمة كل طرف على x، نجد:

$$\frac{1}{x}<\frac{\ln x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

التنقيط

السؤال	النقاط
.1	1,5
.2	1,5
.3	1,0

التمرين الثاني

- **الاقتراح الأول**: **خطأ**

التبرير: الدالة g غير معرفة عند 1 لأنّ $f(1)=0$

- **الاقتراح الثاني**: **خطأ**

التبرير: $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ و منه $g'(0)=\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{0}{e}=0$

- **الاقتراح الثالث**: **صحيح**

التبرير: المعادلة $g(x)=1$ تكافئ $f(x)=e$ التي تقبل حلين: 0 (حل مضاعف) و α حيث $1<\alpha<\frac{3}{2}$

- **الاقتراح الرابع**: **صحيح**

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\ln(f(x))=1$ و منه $\lim\limits_{x\to0}(g\circ g)(x)=\lim\limits_{X\to1}g(X)=\lim\limits_{X\to1}\ln(f(X))=-\infty$

التنقيط

الاقتراح	النقاط
الأول	1,0
الثاني	1,0
الثالث	1,0
الرابع	1,0

التمرين الثالث

الجزء الأول

1. الدالة g هي مركب دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، و من أجل كل عدد حقيقي x،

$$g'(x) = -1 + e^{x-3}\square$$

$g'(x)$ تنعدم من أجل $x = 3$، $g'(x) < 0$ من أجل $x < 3$ و $g'(x) > 0$ من أجل $x > 3$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 3]$ و متزايدة تماما على المجال $[3; +\infty[$

جدول التغيّرات

x	$-\infty$	α	3	β	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$-\infty$ ↘	0 ↘	-1	↗ 0	↗ $+\infty$

التنقيط : الجزء الأول

السؤال	النقاط
.1	0,5
.2	1,5
.3	1,0
.4	0,5

2. الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 3]$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ و $g(3) = -1$ أي $0 \in [-1; +\infty[$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]-\infty; 3]$

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[3; +\infty[$ و $g(3) = -1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ أي $0 \in [-1; +\infty[$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β ينتمي إلى المجال $[3; -\infty[$

3. إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	-	0	$+$	

الجزء الثاني

1. (أ) $\lim_{x\to-\infty}(x-3) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x-3}} = -\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{e^{-3}}\right) = 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(ب) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-3)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{e^{-3}}\right) = 0$ إذن المستقيم الذي معادلته $y = x - 3$ هو مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2. (أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x،

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1\times e^{x-3} - x\,e^{x-3}}{(e^{x-3})^2} \\ &= 1 + \frac{1-x}{e^{x-3}} \\ &= \frac{e^{x-3}+1-x}{e^{x-3}} \\ &= \frac{g(x)}{e^{x-3}}\square \end{aligned}$$

(ب) إشارة f' هي إشارة g و عليه :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ، متناقصة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$ ، و متزايدة تماما على المجال $[\beta;+\infty[$

جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗	$+\infty$

.3 القول أنّ المنحني $\mathcal{C}_f$ يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا معامل توجيهه 1 يُكافئ القول أنّ $f'(x_0) = 1$ و هذه المعادلة تكافئ :

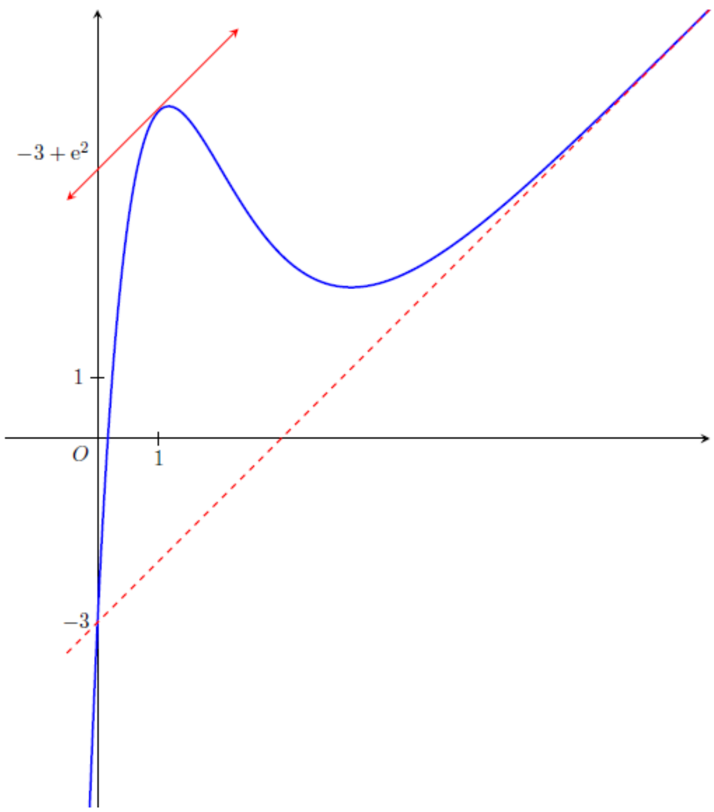
$$\frac{1-x_0+e^{x_0-3}}{e^{x-3}} = 1$$

أي

$$1 - x_0 + e^{x_0-3} = e^{x_0-3}\square$$

أي $x_0 = 1$ و معادلة لهذا المماس هي $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y = x - 3 + e^2$

.4 المنحني $\mathcal{C}_f$



التنقيط : الجزء الثاني

السؤال		النقاط
1	(أ)	1,0
	(ب)	1,0
2	(أ)	0,5
	(ب)	1,0
3		1,0
4		1,5
5	(أ)	1,0
	(ب)	0,5
6		1,0

.5 (أ) المعادلة $\frac{x}{e^{x-3}} = m+3$ تكافئ $x-3+\frac{x}{e^{x-3}} = x+m$ أي $f(x) = x+m$ و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $\mathcal{C}_f$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = x+m$

الجدول التالي يُلخص عدد و إشارة حلول المعادلة

قيم العدد الحقيقي m	عدد و إشارة الحلول
$m < -3$	حل وحيد سالب
$m = -3$	حل معدوم
$-3 < m < -3+e^2$	حلان موجبان
$m = -3+e^2$	حل مضاعف هو 1
$m > -3+e^2$	المعادلة لا تقبل حلول

(ب) إذا كان x_1 و x_2 حلين للمعادلة (1) فإنّ

$$\frac{x_1}{e^{x_1-3}} = \frac{x_2}{e^{x_2-3}}$$

بمعنى $x_1e^{x_2-3} = x_2e^{x_1-3}$ أي $x_1e^{x_2} = x_2e^{x_1}$

.6 لدينا :

$$\begin{aligned}
f(x+3)+3 &= (x+3)-3+\frac{(x+3)}{e^{(x+3)-3}}+3\\
&= (x+3)+\frac{(x+3)}{e^{x}}\\
&= (x+3)+(x+3)e^{-x}\\
&= (x+3)(1+e^{-x})\\
&= h(x)
\end{aligned}$$

بما أنّ $h(x) = f(x+3)+3$ فإنّ $\mathcal{C}_h$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالانسحاب الذي شعاعه $-3\vec{i}+3\vec{j}$