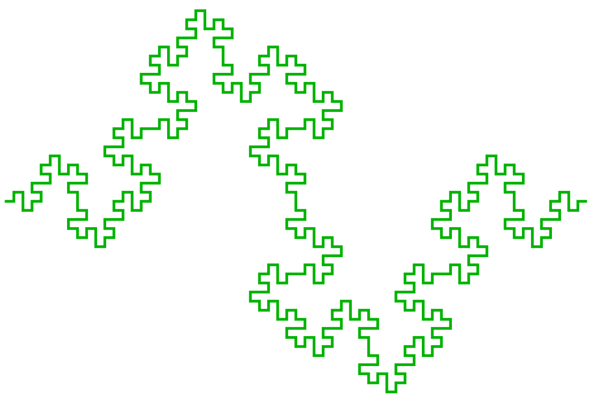
نهائي علوم و رياضيات

Version 1.1

من أجل بداية حسنة

كمال حامدي



0

0

في هذا المحور

الدرجة الثانية

الشكل النموذجي

ليكن كثير الحدود من الدرجة الثانية: $p(x) = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$

الشكل النموذجي لـ $p(x)$ هو:

$$p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$ و نسمّيه مُميّز كثير الحدود $p(x)$

تمرين محلول 1 تعيين الشكل النموذجي

عيّن الشكل النموذجي لكثير الحدود :

1. $p(x) = 2x^2 + 3x - 14$
2. $p(x) = -3x^2 + 4x - 1$

الحل

$$p(x) = 2x^2 + 3x - 14 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 7\right] = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right]$$

ملاحظة

$$x^2 \pm bx = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

جذور كثير الحدود من الدرجة الثانية

حلول المعادلة $p(x) = 0$ (أو جذور كثير الحدود $(p(x)$ مرتبطة بإشارة المميّز $\Delta = b^2 - 4ac$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإنّ المعادلة ليس لها حل
- إذا كان $\Delta = 0$ فإنّ للمعادلة حلاً مضاعفاً هو $x = -\frac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta > 0$ فإنّ للمعادلة حلين متمايزين هما : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

تمرين محلول 2 حل معادلة من الدرجة الثانية

حل المعادلات من الدرجة الثانية التالية :

(أ) $2x^2+5x-7=0$ (ب) $3x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{48}=0$ (جـ) $x^2-5x+6=0$

الحل

لحل المعادلة $2x^2+5x-7=0$ نحسب المميّز $\Delta=5^2-4\times2\times(-7)=25+56=81=9^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما :

$$x_1=\frac{-5-9}{4}=-\frac{7}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-5+9}{4}=1$$

التحليل، مجموع و جداء الجذرين

تحليل كثير الحدود $p(x)=ax^2+bx+c$ مرتبط بإشارة المميّز Δ

- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ لـ $p(x)$ جذرين متمايزين $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و : $p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
  و إذا كان S هو مجموع الجذرين و P هو جداؤهما فإنّ : $S=-\frac{b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ لـ $p(x)$ جذراً مضاعفاً $x_0=-\frac{b}{2a}$ و $p(x)=a(x-x_0)^2$
- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ $p(x)$ لا يقبل جذور و لا يمكن تحليله

ملاحظة

إذا كان ${}_1$ جذراً واضحاً لـ $p(x)$ فإنّ الجذر الآخر هو $x_2=\frac{P}{x_1}$

تمرين محلول 3 تحليل ثلاثي الحد

حلل كثيرا الحدود : $p(x)=2x^2+5x-7$ و $q(x)=2x^2+3x-14$

الحل

$x_1=1$ هو جذر واضح لـ $p()$ لأنّ $2\times1^2+5\times1-7=0$ ، و جداء الجذرين هو $P=-\frac{7}{2}$. إذن $-\frac{7}{2}=\frac{P}{{}_1}={}_2$ و عليه:

$$p(x)=2(x-1)\left(x+\frac{7}{2}\right)=(x-1)(2x+7)$$

إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية

$p(x)=ax^2+bx+c$ كثير حدود من الدرجة الثانية و $\Delta=b^2-4ac$ هو مميّزه

- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ إشارة $p(x)$ هي دوما إشارة a
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ إشارة $p(x)$ هي دوما إشارة a (باستثناء إذا كان $x=-\frac{b}{2a}$ لأن في هذه الحالة $p(x)=0$)
- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ إشارة $p(x)$ هي إشارة a باستثناء قيم x المحصورة بين الحلين لأن في هذه الحالة إشارة $p(x)$ هي عكس إشارة a

تمرين محلول 4 حل متراجحات من الدرجة الثانية

حل في مجموعة الأعداد الحقيقية، المتراجحات :

(أ) $2x^2+5x-7\le0$ (ب) $2x^2+3x-14>0$ (جـ) $4x^2-12x+9\le0$

الحل

حل المتراجحة $2x^2+5x-7\le0$: حسبنا الجذرين $x_1=1$ و $x_2=-\frac{7}{2}$. الجدول التالي يُعطينا إشارة $2x^2+5x-7$:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+5x-7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

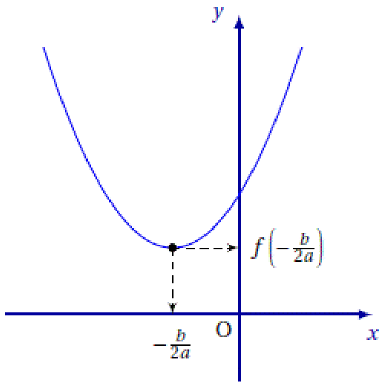
و عليه فإنّ مجموعة حلول المتراجحة $2x^2+5x-7\le0$ هي $S=\left[-\frac{7}{2};1\right]$

اتّجاه التغيّر و التمثيل البياني

لتكن الدالة p المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $p(x) = ax^2 + bx + c$ حيث a، b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

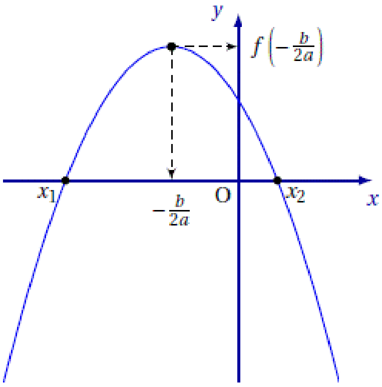
إذا كان $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$



إذا كان $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



عموميات على الدوال

شفعية الدالة

لتكن f الدالة المعرفة على المجوعة D_f المتناظرة بالنسبة إلى 0 وليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني

- نقول أنّ الدالة f زوجية معناه أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathcal{D}_f$، لدينا $f(-x) = f(x)$
و في هذه الحالة و في معلم متعامد المنحني $\mathcal{C}_f$ متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب
- نقول أنّ الدالة f فردية معناه أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathcal{D}_f$، لدينا $f(-x) = -f(x)$
و في هذه الحالة المنحني $\mathcal{C}_f$ متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم

تنبيه

الدالة مربع $x \mapsto x^2$ زوجية
و الدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$
فردية

اتّجاه التغيّر

f هي دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

- القول أنّ الدالة f متزايدة تماما على I معناه أنّه من أجل كل عددين a و b من I
إذا كان $a < b$ فإنّ $f(a) < f(b)$
- القول أنّ الدالة f متناقصة تماما على I معناه أنّه من أجل كل عددين a و b من I
إذا كان $a < b$ فإنّ $f(a) < f(b)$

تنبيه

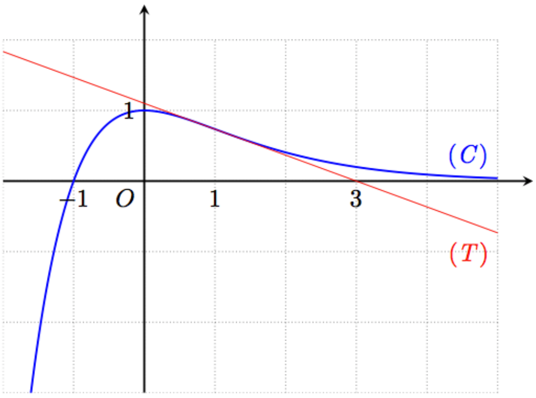
الدالة المتزايدة تُحافظ على
الترتيب و الدالة المتناقصة
تعكس الترتيب

الحل البياني

$\mathcal{C}_f$ هو التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. بيانياً:

- حلول المعادلة $f(x) = 0$، هي فواصل نقط تقاطع المنحني $\mathcal{C}_f$ مع حامل محور الفواصل
- حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي فواصل نقط المنحني $\mathcal{C}_f$ الواقعة تحت محور الفواصل
- حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي فواصل نقط المنحني $\mathcal{C}_f$ الواقعة فوق محور الفواصل

تمرين محلول 5 الحل البياني لمعادلات و متراجحات



المنحنى $(\mathcal{C})$ يُمثل دالة f و المنحنى (T) يُمثل دالة تآلفية g، الدالتين معرفتين على $\mathbb{R}$. حل بيانيا :

(أ) المعادلتين $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ **(ب)** المتراجحة $f(x) > 0$ **(ج)** المتراجحة $f(x) > g(x)$

اتّجاه تغيّر دوال مرفقة

λ عدد حقيقي، f و g دالتان معرفتان على مجال I

- مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I هو دالة متزايدة تماما على I
- مجموع دالتين متناقصتين تماما على مجال I هو دالة متناقصة تماما على I
- إذا كان $\lambda>0$، فإنّ f و λf لهما نفس اتجاه التغيّر على المجال I
- إذا كان $\lambda<0$، فإنّ f و λf لهما اتجاها تغيّر متعاكسان على المجال I
- إذا كانت f موجبة على I فإنّ f و $\sqrt{f}$ لهما نفس اتجاه التغيّر
- إذا كانت f غير معدومة على I فإنّ f و $\frac{1}{f}$ لهما اتجاها تغيّر متعاكسان

تمرين محلول 6 دراسة اتّجاه تغيّر دوال

1. أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f: x \mapsto \sqrt{1-x}$ على المجال $]-\infty; 1]$
2. أدرس اتجاه تغيّر الدالة $g: x \mapsto \frac{1}{2-x}$ على المجال $]2; +\infty[$

الحل

بالنسبة إلى f، نضع $u(x) = 1 - x$

- الدالة u معرفة على المجال $]-\infty; 1]$ و هي دالة تآلفية معامل توجيهها -1 فهي إذن متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$
- من أجل x ينتمي إلى المجال $]-\infty; 1]$ فإنّ $u(x)$ ينتمي إلى المجال $[0; +\infty[$
- الدالة $X \mapsto \sqrt{X}$ متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

و منه الدالة f متناقصة (لأنها مركب دالة متناقصة متبوعة بدالة متزايدة) على المجال $]-\infty; 1]$

قواعد الحساب على المتباينات

العمليات على المتباينات

- من أجل كل عدد حقيقي a، $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$
- من أجل كل عدد $k > 0$، $x < y \Leftrightarrow kx < ky$
- من أجل كل عدد $k < 0$، $x < y \Leftrightarrow kx > ky$
- من أجل x و y من نفس الإشارة ، $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
- من أجل كل x و y موجبان تماماً ، $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$
- من أجل كل x و y سالبان تماماً ، $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$
- من أجل كل x و y موجبان تماماً ، $x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$
- إذا كانت f متزايدة على مجال I، $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$
- إذا كانت f متناقصة على مجال I ، $x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$
- يُمكن أن نجمع طرفا بطرف متباينتين من نفس الاتجاه
- يُمكن أن نضرب طرفي متباينتين من نفس الاتجاه، طرفا بطرف، عندما يتعلق الأمر بأعداد موجبة
- **لا يمكن** طرح أو قسمة طرفا بطرف متباينتين

تنبيه
المتباينة لا تتغيّر بضرب طرفيها بعدد موجب تماما

تنبيه
ترتيب مربعي عددين موجبين هو نفس ترتيب هذين العددين

تمرين محلول 7 استعمال خواص المتباينات

1. علما أنّ $3 < x < 5$ ، ما يُمكن استنتاجه بالنسبة إلى $\frac{1}{3-x}$
2. أثبت أنّه من أجل $x > 1$، فإنّ $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

الحل

1. من أجل $3 < x < 5$ فإنّ $-5 < -x < -3$ و بإضافة 3 إلى أطراف الحصر نحصل على $-2 < 3 - x < 0$
الدالة مقلوب متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ إذن: $\frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2}$
2. من أجل كل $x > 1$: $0 < x^2 - 1 < x^2$ و عليه $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2}$ أي: $\sqrt{x^2 - 1} < x$ ثمّ: $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{x}$

تمرين محلول 8 حصر فرق و حاصل قسمة عددين

1. علما أنّ: $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases}$ عيّن حصراً للعدد $x - y$
2. علما أنّ: $\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases}$ عيّن حصراً للعدد $\frac{x}{y}$
3. علما أنّ: $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2 < y < 3 \end{cases}$ عيّن حصراً للعدد $\frac{x}{y}$
4. علما أنّ: $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ -1 < y < 1 \end{cases}$ عيّن حصراً للعدد xy

تنبيه
لحصر $x - y$، نقوم أولاً بحصر $-y$ ثمّ نجمع طرفا بطرف مع حصر x

الحل

1. من الجملة $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases}$ نستنتج $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \end{cases}$ و منه $-1 < x - y < 7$

تطبيقات

المعادلات

01 معادلات من الدرجة الثانية. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

1. $2x^2 - 3x - 5 = 0$
2. $(x-2)(x+3) = (x-2)(4x+1)$

02 معادلات بتغيير للمتغيّر. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

1. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
2. $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

03 معادلات ناطقة. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

1. $\frac{x^2-x}{x-1} = 2x+3$
2. $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$

04 معادلات صمّاء. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

1. $\sqrt{x} = x - 2$
2. $\sqrt{x-3} = -x + 5$

05 معادلات بحلول واضحة

1. نعتبر المعادلة (E):

$$2x^3 - 13x^2 + 5x + 6 = 0$$

(أ) أثبت أنّ العدد 1 هو حلاً للمعادلة (E)

(ب) عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون:

$$2x^3 - 13x^2 + 5x + 6 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

(جـ) حل في $\mathbb{R}$ المعدلة (E)

2. بعد تعيين حلاً واضحا، حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

(أ) $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10 = 0$

(ب) $x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0$

المتراجحات

06 حل متراجحة من الدرجة الثانية

نعتبر ثلاثي الحدود $f(x) = -5x^2 - 4x + 1$

1. عيّن جذور $f(x)$.
2. شكل جدول إشارة $f(x)$ مع التبرير.
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x) \leq 0$

07 حل متراجحة ناطقة

حل في $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ المتراجحة:

$$\frac{-2x}{x+1} \geq \frac{4x+3}{x-2}$$

08 حل متراجحة صماء. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

1. $2 - x < \sqrt{-x+4}$
2. $2x + 5 > \sqrt{x-2}$
3. $x + 1 \leq \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

عموميات على الدوال

07 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بالعبارة

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. عين العددين a و b حتى يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$:

$$f(x) = a + \frac{b}{1-x}$$

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجوعة تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathcal{C})$
3. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
4. اكتب معادلة لمماس المنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة $A(0; 1)$
5. اثبت أنّ النقطة $I(1; 1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C})$

النتائج

رقم التمرين	النتائج
01	1. $S_1 = \left\{-1; \frac{5}{2}\right\}$ 2. $S_2 = \left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$
02	1. $S_1 = \{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\}$ 2. $S_2 = \{16\}$
03	1. $S_1 = \{-3\}$ 2. $S_2 = \{1\}$
04	1. $S_1 = \{4\}$ 2. $S_2 = \{4\}$
05	1. (ب) $(a; b; c) = (2; -11; -6)$ (جـ) $S_1 = \left\{-\frac{1}{2}; 1; 6\right\}$ 2. (أ) $S_2 = \left\{-\frac{5}{2}; ?; \frac{1}{3}\right\}$ (ب) $S_3 = \{3\}$ (جـ) $S_4 = \{-1-\sqrt{2}; -2; -1+\sqrt{2}; ?\}$
06	1. $\left\{-1; \frac{1}{5}\right\}$ 3. $]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$
07	3. $]-1; 2[$
08	1. $]0; 4]$ 2. $[2; +\infty[$ 3. $]-\infty; -1]$