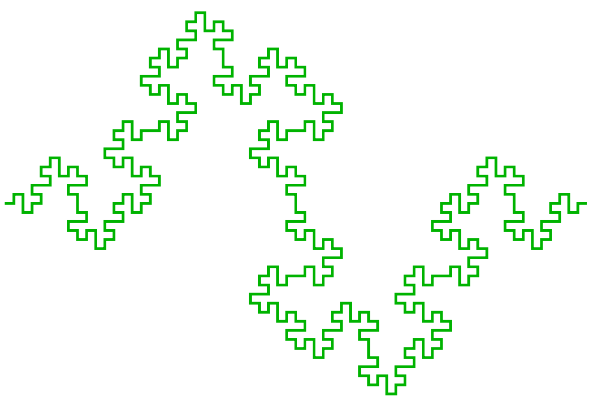
نهائي علوم و رياضيات

Version 1.1

الاشتقاقية

كمال حامدي



2

في هذا المحور

تعاريف (تذكير)

العدد المشتق - الدالة المشتقة

تعريف

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي a

نقول أنّ f قابلة للاشتقاق عند a و عددها المشتق عند a هو العدد الحقيقي $f'(a)$ إذا كان:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

أو

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

- القول أنّ f قابلة للاشتقاق على I يعني أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل عدد حقيقي a من I
- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I، فإنّ الدالة المشتقة للدالة f على I هي الدالة التي يُرمز لها f' و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد المشتق $f'(x)$

المماس لمنحنى دالة. التقريب التآلفي

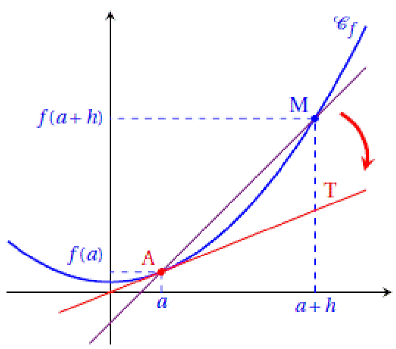
العدد المشتق $f'(a)$ هو معامل توجيه المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a. معادلة لهذا المماس هي:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

محليا ، يُمكن استبدال الدالة f بالدالة التآلفية الممثلة بالمستقيم (T).

أي من أجل x قريب من a، يُمكن استبدال $f(x)$ بـ $f'(x)(x-a)+$ $f(a)$ أو بوضع $x=a+h$، و من أجل h قريب من الصفر ، يُمكن استبدال $f(a+h)$ بـ $f'(a)\times h+f(a)$ و نكتب :

$$f(a+h)\approx f'(a)\times h+f(a)$$



ملاحظة

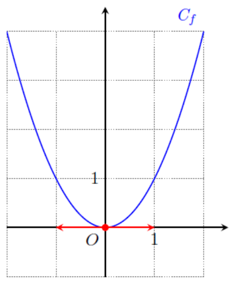
في الفيزياء، نكتب للتعبير عن $\Delta f=f'(a)\Delta x$ هذا التقريب ونكتب :

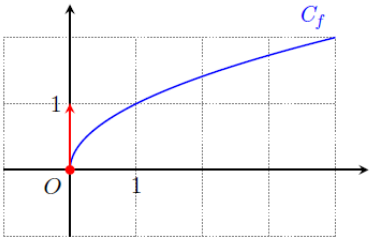
$$f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

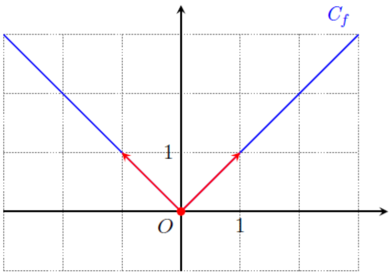
أو

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

أمثلة قابلية اشتقاق الدوال $x \mapsto x^2$ ، $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto |x|$ عند الصفر و تفسيراتها الهندسية







- الدالة $x \mapsto x^2$ قابلة الاشتقاق عند 0 و عددها المشتق عند الصفر هو $f'(0) = 0$
  التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2$ يقبل في النقطة $(0,0)$ مماسا أفقيا (معامل توجيهه معدوم)
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ غير قابلة الاشتقاق عند 0. لماذا ؟
  التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ يقبل في النقطة $(0,0)$ مماسا عموديا (ليس له معامل توجيه)
- الدالة $x \mapsto |x|$ غير قابلة الاشتقاق عند 0. لماذا ؟
  التمثيل البياني للدالة $x \mapsto |x|$ يقبل في النقطة $(0,0)$ نصف مماس من اليمين (معامل توجيهه 1) و نصف مماس من اليسار (معامل توجيهه -1)

ملاحظة : الاستمرارية و الاشتقاقية

كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال I هي دالة مستمرة على I. و العكس غير صحيح

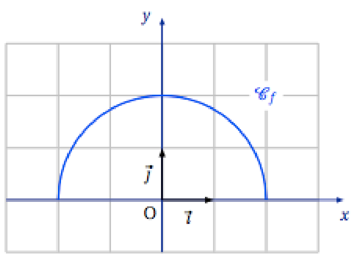
تطبيقات

تطبيق 1 قابلية اشتقاق دالة صمّاء عند عدد

f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

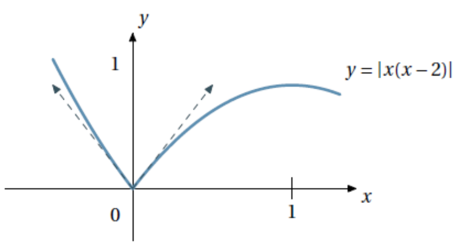
و ليكن تمثيلها البياني التالي:



1. التخمينات: هل الدالة f قابلة اشتقاق عند 0 ؟ عند 2 ؟
2. باستعمال تعريف قابلية اشتقاق دالة عند عدد ، أثبت صحة كل تخمين.

تطبيق 2 قابلية اشتقاق دالة بالقيمة المطلقة عند عدد

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = |x(x-2)|$ و ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني



1. أثبت أنّ f قابلة للاشتقاق من اليمين عند 0
   (ب) عيّن معادلة للمماس من اليمين للمنحنى $\mathcal{C}$ عند النقطة A
2. أثبت أنّ f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 0
   (ب) عيّن معادلة للمماس من اليسار للمنحنى $\mathcal{C}$ عند النقطة A
3. هل الدال f قابلة للاشتقاق عند 1 ؟

تطبيق 3 استعمال التعريف

لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = x\sqrt{x}$

1. برّر قابلية اشتقاق الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و احسب $f'(x)$
2. أثبت ، باستعمال تعريف العدد المشتق، أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0

قواعد الاشتقاق

مشتقات الدوال المألوفة - المشتقات و العمليات على الدوال

مشتقات الدوال المألوفة		
$f(x) = \cdots$	$f'(x) = \cdots$	مجالات قابلية الاشتقاق
$a \in \mathbb{R}$		$]-\infty; +\infty[$
x		$]-\infty; +\infty[$
$(n \in \mathbb{N}) \quad x^n$		$]-\infty; +\infty[$
$\frac{1}{x}$		$]-\infty; 0[$ أو $]0; +\infty[$
$(n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{x^n}$		$]-\infty; 0[$ أو $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$		$]0; +\infty[$
$\cos x$		$]-\infty; +\infty[$
$\sin x$		$]-\infty; +\infty[$
$\tan x$		على كل مجال من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

المشتقات و العمليات	
$f = \cdots$	$f' = \cdots$
$\boldsymbol{u + v}$	$\boldsymbol{u' + v'}$
$(\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}) \quad \boldsymbol{ku}$	$\boldsymbol{ku'}$
$\boldsymbol{uv}$	$\boldsymbol{u'v + uv'}$
$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	$\boldsymbol{\frac{u'v - uv'}{v^2}}$
$\boldsymbol{\frac{1}{v}}$	$\boldsymbol{\frac{-v'}{v^2}}$

الدالة المشتقة لدالة مركبة

مبرهنة

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I و تأخذ قيمها في مجال J و إذا كانت الدالة v قابلة للاشتقاق على J فإنّ الدالة المعرفة على I بـ $(x) = v[u(x)]$ تقبل الاشتقاق على I و من أجل كل x من I:

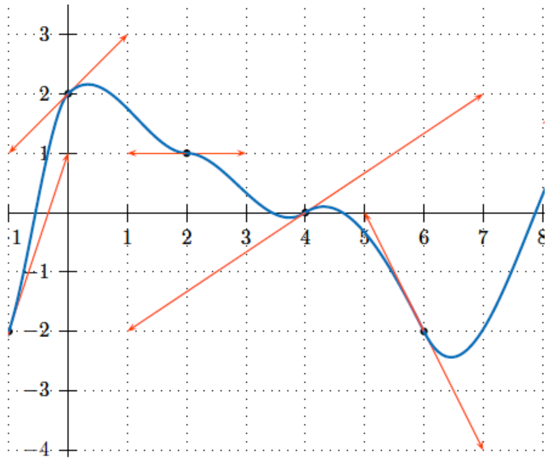
$$f'(x) = u'(x)v'[u(x)]$$

نتائج و أمثلة

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I	فإنّ الدالة التالية قابلة للاشتقاق على I	و دالتها المشتقة هي:	أمثلة	
$n \in \mathbb{N}^*$	u^n		$f(x) = \left(\frac{3x-5}{x-1}\right)^3$ $g(x) = (2x^2 + x - 1)^4$ $h(x) = \sin^2 x$	
$n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{u^n}$		$f(x) = \frac{1}{(x^3 + x^2 + 1)^5}$	
و من أجل كل x من I حيث $u(x) > 0$	$\sqrt{u}$		$f(x) = \sqrt{x^6 + 2}$ $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$	
	$\cos u$		$f(x) = \cos\sqrt{x}$ مع $x > 0$ $g(x) = \cos\frac{\pi}{x}$	
	$\sin u$		$f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ $g(x) = \sin(x^2)$	

تطبيقات

تطبيق 4 قراءة بيانية



المنحنى التالي هو لدالة f مستمرة على $[-1;8]$.

1. عيّن، بيانيا:

$f(-1)$، $f(0)$، $f(2)$ ، $f(4)$ و $f(6)$

2. عيّن كذلك بيانيا :

$f'(0)$، $f'(2)$ ، $f'(4)$ و $f'(6)$

3. اعط تخمينا في قابلية اشتقاق f عند -1

4. حل، بيانيا و حسب الدّقة التي يسمح بها الرسم، في المجال $[-1;8]$:

(أ) المعادلة $f'(x) = 0$

(ب) المتراجحة $f'(x) > 0$

تطبيق 5 المشتقات المتتابعة

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1. اثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\sqrt{x^2+1} \times f'(x) = f(x)$

2. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا : $(x^2+1)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$

تطبيقات الاشتقاقية

اتجاه التغيّر

مبرهنة

f هي دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة تماما على I فإنّ الدالة f متزايدة تماما على I
- إذا كانت f' سالبة تماما على I فإنّ الدالة f متناقصة تماما على I
- إذا كانت f' هي الدالة المعدومة على I فإنّ الدالة f ثابتة على I

مثال : f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 3x^2$

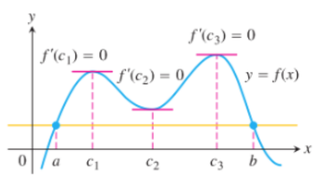
من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) \geq 0$. إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

القيم الحدّية المحلية

تعريف

f هي دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و c عدد حقيقي من I. القول أنّ $f(c)$ هي قيمة حدّية محلية عظمى للدالة f يعني وُجود مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل c، بحيث من أجل كل x من J: $f(x) \leqslant f(c)$

بطريقة مماثلة نُعرف القيمة الحدّية المحلية الصغرى

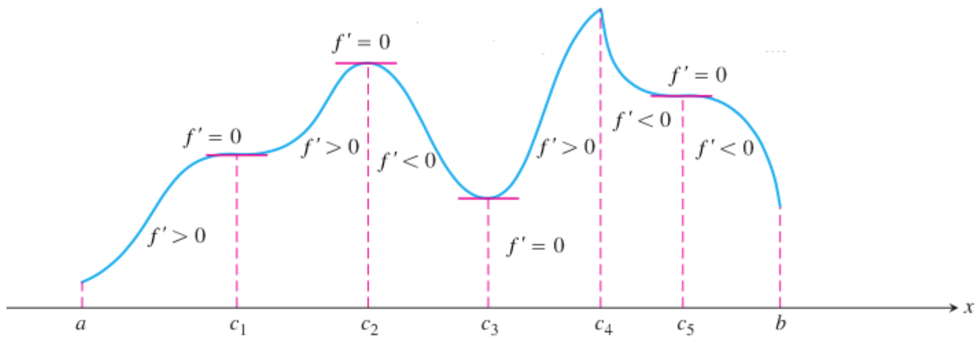


مبرهنة

f هي دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و c عدد حقيقي من I

- إذا كانت $f(c)$ قيمة حدّية محلية فإنّ $f'(c) = 0$
- إذا انعدمت f' عند c مغيّرة إشارتها فإنّ $f(c)$ قيمة حدّية محلية

مثال: عيّن القيم الحدّية



تنبيه

إذا كانت $f(c)$ قيمة حدّية محلية فإنّ المماس للمنحني في النقطة $A(c; f(c))$ في $\mathcal{C}_f$ يكون أفقياً

استعمال العدد المشتق لحساب بعض النهايات

المبدأ: لإزالة حالة عدم تعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$" للدالة f عند a، يمكن كتابة عبارة $f(x)$ على الشكل $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ مع g قابلة للاشتقاق عند a. عندئذ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g'(a)$

مثال: f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{(2+x)^5-32}{x}$. النهاية عند 0 تُؤدي إلى حالة عدم تعيين.

بوضع $g(x) = (2+x)^5$، احسب نهاية f عند 0.

تطبيقات

تطبيق 6 دراسة اتجاه تغيّر دالة كثير حدود

f هي الدلة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3$

عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

عيّن الدالة المشتقة للدالة f و ادرس إشارتها

شكل جدول تغيّرات الدالة f ثمّ أنشئ تمثيلها البياني $\mathcal{C}$ في معلم متعامد و متجانس

تطبيق 7 دراسة اتجاه تغيّر دالة ناطقة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{4}{x-2}$

ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و أثبت أنّ $\frac{23}{2}$ هو قيمة حدّية محلية صغرى للدالة f على المجال $]2; +\infty[$

تطبيق 8 دراسة اتجاه تغيّر دالة صمّاء

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \sqrt{4x^2+3}$ و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1. أثبت أنّ محور التراتيب هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}$
2. عيّن الدالة المشتقة للدالة f. شكل جدول تغيّرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$
3. أثبت أنّ المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}$ عند $+\infty$
4. أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ و مستقيماته المقاربة

دراسة الدوال المثلثية

الدالة $x \mapsto \tan x$

تعريف

الدالة ظل، التي نرمز لها tan هي الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، بـ :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\cos x \neq 0$ يعني $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$. إذن مجموعة تعريف الدالة tan هي $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

خواص

من أجل كل عدد حقيقي x من D، $\tan(x+\pi) = \tan x$ **(1)** و $\tan(-x) = -\tan x$ **(2)**

تنبيه

نقول أنّ الدالة tan هي:
(1) دورية و دورها π
(2) فردية

البرهان

إذا كان x ينتمي إلى D فإنّ $x+\pi$ و $-x$ ينتميان كذلك إلى D و :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \quad (1)$$

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \quad (2)$$

دراسة الدالة tan

خاصية

الدالة tan قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي من D و :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

البرهان الدالتان sin و cos قابلتان للاشتقاق على كل مجال من D و :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

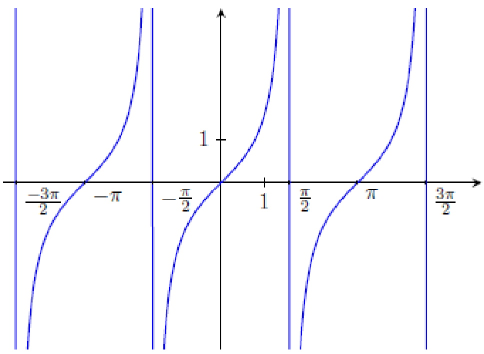
جدول التغيّرات و التمثيل البياني

- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$، $\tan'(x) > 0$، إذن الدالة tan متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ و بما أنّ $\cos x > 0$ على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$
- في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ نُنشئ المنحنى الممثل للدالة tan على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$، ثمّ بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ O نحصل على المنحنى Γ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. ثمّ نُطبق على المنحنى Γ انسحابات ذات الأشعة $k\pi\vec{\imath}$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تنبيه

حسب الخاصتين (1) و (2) فإنّه يُمكن اختصار دراسة الدالة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$tan'(x)$	1 +	|
$tan(x)$	0 ↗	$+\infty$



تمارين و مسائل للتعمق

التمرين الأول

المكتسبات

40 دقيقة

دراسة اتجاه تغيّر دالة
وضعية منحنى مع مماس
مركز تناظر
القيمة المطلقة
قابلية الاشتقاق عند عدد
منحنى دالة مرفقة

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$

و ليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا :

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 + 1}$$

حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
3. ليكن d المماس للمنحنى $\mathcal{C}_f$ في النقطة $I(0;3)$. ادرس وضعية $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى d
4. أثبت أنّ I مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$
5. أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_f$ (وحدة الرسم 2 cm)
6. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$g(x) = \frac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$$

و ليكن $\mathcal{C}_g$ تمثيلها البياني

(أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند 0

(ب) أنشئ، في نفس المعلم، المنحنى $\mathcal{C}_g$ (لا يطلب دراسة تغيّرات g)

التمرين الثاني

المكتسبات

45 دقيقة

قابلية الاشتقاق على مجال
قابلية الاشتقاق عند عدد
إشارة دالة
اتجاه تغيّر دالة صماء
المستقيم المقارب المائل
مبرهنة القيم المتوسطة

f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. نضع من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$، $g(x) = x\sqrt{x} - 1$

(أ) برّر قابلية اشتقاق الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثمّ احسب $g'(x)$ من أجل $x > 0$

(ب) هل الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

(جـ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g و شكل جدول تغيراتها على المجال $[0; +\infty[$

(د) احسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

2. عيّن نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$
3. بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x - 3$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$ عند $+\infty$
4. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$،

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$$

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$

5. أنشئ المستقيم (d) و المنحنى $\mathcal{C}$
6. اعط مع التبرير عدد حلول المعادلة :

$$4 - 3\sqrt{x} = \pi\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}$$

التمرين الثالث

المكتسبات

40 دقيقة

دراسة دالة ناطقة
المستقيم المقارب المائل
وضعية منحنى بالنسبة
لمستقيم مقارب مائل
مناقشة معادلة وسيطية

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{2x^3+x^2+1}{x^2}$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم،
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2}$$
2. (أ) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها
(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
3. برّر أن المستقيم d ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ثمّ ادرس وضعيتهما النسبية.
(ب) احسب $f(-1)$، ماذا تستنتج ؟ أرسم d و $(\mathcal{C}_f)$
4. باستعمال $(\mathcal{C}_f)$، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد و إشارة حلول المعادلة
$$2x^3+(1-m)x^2+1=0$$

التمرين الرابع

المكتسبات

40 دقيقة

دراسة دالة مساعدة
مبرهنة القيم المتوسطة
إشارة دالة
دراسة دالة ناطقة
وضعية منحنى بالنسبة
لمماس
إنشاء منحنى دالة

الجزء الأول g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

1. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}6<\alpha<1{,}7$
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

الجزء الثاني f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها
2. احسب $f'(x)$ و بيّن أنّ إشارتها هي إشارة $g(x)$. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
3. عيّن معادلة للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة A ذات الفاصلة 0
4. ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمماس (Δ)
5. أرسم المماس (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$

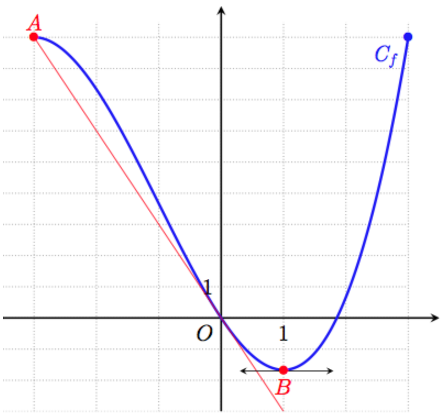
التمرين الخامس

المكتسبات

30 دقيقة

قراءة بيانية لمنحنى دالة
حل جملة معادلات
تحليل و إشارة ثلاثي حدود
اتجاه تغيّر كثير حدود من
الدرجة الثالثة

الشكل التالي هو لـ C_f منحنى الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



هذا المنحني يُحقق الشروط التالية :

يمر بمبدأ المعلم O و يشمل النقطة $A(-3;9)$، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا و المستقيم (OA) هو مماس له عند النقطة O

1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA) ؟
2. نفرض أنّ f معرفة على $[-3;3]$ بـ : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
حيث a، b، c و d أعداد حقيقية
(أ) بيّن باستعمال الشروط السابقة أنّ: $a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$، $c=-3$ و $d=0$
(ب) حلل $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغيّر الدالة f

التمرين السادس

المكتسبات

40 دقيقة

دراسة دالة صماء
قابلية الاشتقاق على مجال
قابلية الاشتقاق عند عدد
المماس لمنحنى دالة
إنشاء منحنى دالة

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$f:x\mapsto x\sqrt{3x-x^2}$$

1. (أ) تحقق أن f معرفة على المجال $[0;3]$.
(ب) أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;3[$. احسب $f'(x)$ من أجل كل x من المجال $]0;3[$.
2. أثبت أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0.
3. (أ) ما هي نهاية $\frac{f(x)}{x-3}$ عندما x يؤول إلى 3 ؟
(ب) هل الدالة f قابلة الاشتقاق عند 3 ؟
4. ليكن $(\mathcal{C})$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
(أ) ادرس اتجاه تغيّر f. مثل جدول تغيراتها.
(ب) حدّد المماسين للمنحنى $(\mathcal{C})$ عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 0 و 2.
(جـ) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين السابع

المكتسبات

50 دقيقة

دراسة دالة صماء
قابلية الاشتقاق على مجال
قابلية الاشتقاق عند عدد
المماس لمنحنى دالة
إنشاء منحنى دالة

نعتبر، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$، المنحنى ذو المعادلة

$$f(x)=\frac{x(ax+b)}{2(x-c)^2}$$

حيث a، b و c هي أعداد حقيقية (وحدة الرسم: 1 cm)

1. عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c التي من أجلها يكون لهذا المنحني مستقيمين مقاربين معادلتاهما $x=1$ و $y=\frac{3}{2}$ على الترتيب و يكون للمماس عند النقطة O المعادلة $y=-2x$
2. لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$$

وليكن $\mathcal{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
(أ) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها
(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
(جـ) عيّن معادلة للمماس عند النقطة O، و معادلة للمماس عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$
(د) ادرس وضعية المنحنى $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مستقيمه المقارب الأفقي
(هـ) أنشئ $\mathcal{C}$، المستقيمات المقاربة و المماسات التي تم تعيينها في السؤال (جـ)
3. ليكن Δ_m المستقيم ذو المعادلة $y=4x+m$ حيث m عددا حقيقيا. عيّن، بيانيا و حسب قيم m، عدد حلول المعادلة

$$f(x)=4x+m$$

التمرين الثامن

المكتسبات
45 دقيقة
دراسة دالة ناطقة
مبرهنة القيم المتوسطة
إشارة دالة مساعدة
حل جملة معادلات
تقاطع منحن مع مستقيم مقارب
إنشاء منحنى دالة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$$

و ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الرسم: 1 cm)

1. (أ) نضع $g(x)=x^3+3x+8$. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g
   أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α. تحقق أنّ $-2<\alpha<-1$
   (ب) حدّد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$
2. ادرس نهايات f عند $-\infty$ و عند $+\infty$
   (ب) احسب $f'(x)$ ثمّ شكل جدول تغيّرات f
3. أثبت أنّه يوجد أربعة أعداد حقيقية a، b، c و d حيث:
   $$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$$
4. استنتج أنّ المنحنى $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا Δ يُطلب تعيين معادلة له و ادرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى Δ. تحقق أنّ المستقيم Δ يقطع $\mathcal{C}$ في نقطة وحيدة A
5. عيّن فاصلتا النقطتين B و B' من المنحنى $\mathcal{C}$ أين يكون المماس فيها موازيا للمستقيم Δ
6. (أ) تحقق أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$. استنتج قيمة تقريبية لـ $f(\alpha)$
   (ب) أنشئ بدقة المستقيم Δ و المنحنى $\mathcal{C}$

التمرين التاسع

المكتسبات
50 دقيقة
دراسة دالة ناطقة
مبرهنة القيم المتوسطة
إشارة دالة مساعدة
حل جملة معادلات
مفهوم المنحني المقارب
وضعية منحنى بالنسبة لمماس
انشاء منحنى دالة

الجزء الأول نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(x)=2x^3-3x^2-2$$

1. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g و شكل جدول تغيّراتها
2. (أ) أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. تحقق أنّ α ينتمي إلى المجال $[1{,}19;1{,}20]$
   (ب) استنتج إشارة $g(x)$

الجزء الثاني هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بما يلي

$$f(x)=\frac{x^3+2x}{x-1}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجالات التعريف.
2. اثبت أنّه يوجد أعداد حقيقية a، b و c حيث من أجل $x\neq 1$،
   $$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{3}{x-1}$$
3. اثبت أنّ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[(x)-(x^2+x+3)]=0$
   ملاحظة: نقول أنّ المنحنى (Γ) ذو المعادلة $y=x^2+x+3$ هو مُقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$
4. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
5. ليكن (T) المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة 0
   (أ) عيّن معادلة للمماس (T)
   (ب) ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المماس (T)
6. أنشئ في نفس المعلم المماس (T) و المنحنيين Γ و $(\mathcal{C}_f)$.

التمرين العاشر

المكتسبات
45 دقيقة
دراسة دالة صماء
المستقيم المقارب المائل
قابلية الاشتقاق عند عدد
اتجاه التغيّر
انشاء منحنى دالة

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ بما يلي:
$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$
$(\mathcal{C})$ هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. احسب نهايات f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أثبت أن المستقيم d ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$.
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟ عند -4 ؟
4. احسب $f'(x)$ من أجل x من $]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$
5. شكل جدول تغيرات f
6. أنشئ المستقيمات المقاربة ثمّ المنحني $(\mathcal{C})$.

التمرين الحادي عشر

المكتسبات
45 دقيقة
دراسة دالة وسيطية
وضعية منحنى بالنسبة
لمستقيم مقارب مائل
القيمة الحدّية
تعيين مجموعة نقط

λ عدد حقيقي حيث $\lambda>0$. f_λ هي الدالة المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بما يلي:
$$f_\lambda(x)=x+\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2}{x^3}$$
$(\mathcal{C}_\lambda)$ تمثيلها البياني

1. (أ) ادرس نهايات الدالة f_λ عند حدود المجال I
   (ب) برهن أنّه يوجد مستقيم مقارب مائل d للمنحني $(\mathcal{C}_\lambda)$ ثمّ ادرس وضعيتهما النسبية
2. (أ) ادرس تغيّرات الدالة f_λ على المجال I
   (ب) أثبت أن f_λ تقبل قيمة حدّية تبلغها عند عدد حقيقي ندل عليه بـ x_λ
3. P_λ هي النقطة من $(\mathcal{C}_\lambda)$ ذات الفاصلة x_λ
   (أ) أثبت أنّ مجموعة النقط P_λ محتواة في المستقيم ذي المعادلة $y=\frac{16}{9}x$
   (ب) ما هي مجموعة النقط P_λ عندما يمسح λ المجال I

التمرين الثاني عشر

المكتسبات
40 دقيقة
دراسة دالة وسيطية
تغيّرات دالة وسيطية
محور التناظر
مفهوم النقطة المشتركة
لعدة منحنيات
انشاء منحنى دالة

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$f_n(x)=(x^2-2x)^n$$

1. احسب نهايات f_n عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. ادرس تغيّرات f_n (ميّز الحالتين n زوجي و n فردي)
3. نسمّي $(\mathcal{C}_n)$ التمثيل البياني للدالة f_n في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   (أ) تحقق أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_n)$، ثمّ أنّ $(\mathcal{C}_n)$ يمرّ من أربع نقط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n.
   (ب) احسب إحداثيات هذه النقط.
4. أنشئ في نفس المعلم $(\mathcal{C}_2)$ و $(\mathcal{C}_7)$

حل تمارين و إرشادات

التمرين العاشر

1. ▪ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

▪ عند $-\infty$:

$$f(x)=\frac{[(x+1)+\sqrt{x^2+4x}][(x+1)-\sqrt{x^2+4x}]}{(x+1)-\sqrt{x^2+4x}}$$
$$=\frac{-2x+1}{(x+1)-\sqrt{x^2+4x}}$$
$$=\frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}}$$

و منه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

2. لنحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]$

$$f(x)-(2x+3)=\sqrt{x^2+4x}-x-2$$
$$=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$

و منه $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]=0$

النتيجة : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ هو مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$

3. ▪ لندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{x}=1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}$$

$\lim_{x\to0}\frac{(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، إذن الدالة f غير قابلة الاشتقاق عند 0

▪ لندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -4

$$\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=\frac{x+4+\sqrt{x^2+4x}}{x+4}$$
$$=1+\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x+4}$$
$$=1+\frac{x^2+4x}{(x+4)\sqrt{x^2+4x}}$$
$$=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4x}}$$

$\lim_{x\to-4}\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=-\infty$ ، إذن الدالة f غير قابلة الاشتقاق عند -4

4. $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}}$

▪ إذا كان $x\geq 0$ ، $x+2>0$ ، إذن $f'(x)>0$

▪ إذا كان $x\leq -4$ ، $x+2<0$ ، و :

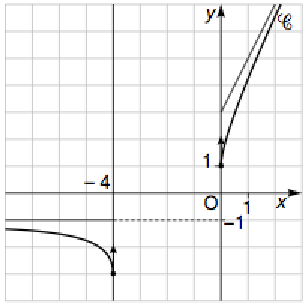
$$f'(x)=\frac{(x^2+4x)-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x}[\sqrt{x^2+4x}-(x+2)]}$$
$$=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}[\sqrt{x^2+4x}-(x+2)]}$$

أي $f'(x)<0$

5. جدول التغيرات

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
f'(x)		−				+	
f(x)	-1	↘	-3		1	↗	$+\infty$

6. التمثيل البياني



التمرين الثاني عشر

1. (أ) نهايات الدالة f عند حدود المجال I

$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

و $\lim_{x\to0} f_\lambda(x)=+\infty$

(ب) بما أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2}{x^3}=0$$

فإنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$ هو مقارب لمنحنى الدالة f_λ عند $+\infty$

و إشارة $f_\lambda(x)-x$ هي إشارة $\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2}{x^3}=\frac{2\lambda x^2+\lambda^2}{x^3}$

و منه من أجل $x\in]0;+\infty[$ المنحنى $\mathcal{C}_\lambda$ يقع فوق (d)

2. (أ) من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لدينا :

$$f'_\lambda(x)=1-\frac{2\lambda}{x^2}-\frac{3\lambda^2}{x^4}$$
$$=\frac{x^4-2\lambda x^2-3\lambda^2}{x^4}$$
$$=\frac{(x^2-3\lambda)(x^2+\lambda)}{x^4}$$

و منه جدول التغيّرات التالي:

x	0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		−	0	+	0
f_λ	$+\infty$	↘	$\frac{16}{9}\sqrt{3\lambda}$	↗	$+\infty$

(ب) حسب السؤال (أ) $x_\lambda=\sqrt{3\lambda}$

3. P_λ هي نقطة من C_λ فاصلتها x_λ و ترتيبها هو $y_\lambda=\frac{16}{9}\sqrt{3\lambda}$. لدينا $y_\lambda=\frac{16}{9}x_\lambda$ بمعنى إحداثيات P_λ تُحقق المعادلة $y=\frac{16}{9}x$.

إذن مجموعة النقط P_λ هي محتواة في المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{16}{9}x$

(ب) و عكسيا، إذا كان $M\left(x;\frac{16}{9}x\right)$ مع $x>0$ فإنّ $M=P_\lambda$ حيث $\lambda=\frac{x^2}{3}$

النتيجة: مجموعة النقط P_λ لمّا λ يمسح المجال I هي نصف المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{16}{9}x$ مع $x>0$

التمرين الثاني عشر

1. $\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

إذن $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$

2. $f_n'(x)=2n(x-1)(x^2-2x)^{n-1}$

▪ إذا كان n فردي فإنّ $n-1$ زوجي و منه فإنّ إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $(x-1)$ و يكون جدول تغيّرات f_n على الشكل التالي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		−	0	+	
$f_n(x)$		↘	-1	↗	

▪ إذا كان n زوجي فإنّ $n-1$ فردي و منه فإنّ إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $(x-1)(x^2-2x)$ و يكون جدول تغيّرات f_n على الشكل التالي :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f_n'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f_n(x)$		↘	0	↗	1	↘	0	↗	

3. يكون المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو محورتناظر للمنحنى $\mathcal{C}_n$ بتحقق المساواة $f(2-x)=f(x)$.

و لدينا :

$$f(2-x)=\left((2-x)^2-2(2-x)\right)^n$$
$$=(x^2-2x)^n$$
$$=f(x)$$

4. الإحداثيات هي حلول المعادلتين $x^2-2x=0$ و $x^2-2x=1$ و منه النقط الصامدة هي :

$A(2;0)$ ، $O(0;0)$ ، $A'(1-\sqrt{5};1)$ و $A''(1+\sqrt{5};1)$