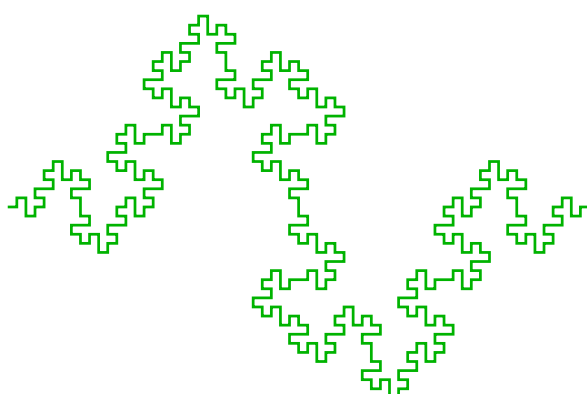


النهايات و الاستمرارية

كمال حامدي



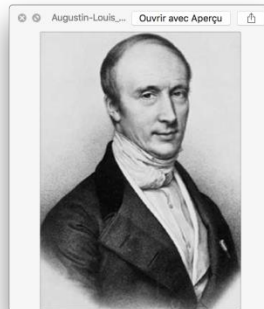
في هذا المحور

- 2..... النهايات (تعريف)
- 9..... العمليات على النهايات
- 12..... النهايات بالمقارنة
- 15..... نهاية دالة مركبة
- 16..... المستقيم المقارب المائل
- 18..... مفهوم الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال
- 21..... الدوال المستمرة و حل المعادلات (مبرهنة القيم المتوسطة)
- 24..... أعمال موجهة
- 35..... تمارين للتعمق
- 37..... من البكالوريا.....



كوشي أوغسطين لويس (Augustin Louis Cauchy): عالم رياضيات وفيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789 م إلى 1857 م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، وبصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات والاستمرارية، و طور نظرية الدوال ذات متغيرات عقدية (مركبة). شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس (Laplace) و العالم لاغرانج (Lagrange) وأصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفي مع حفيد تشارلز العاشر، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر.

لقد نشر ما مجموعه 789 عملا، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعداد والمرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء.



النهايات (تعريف)

نهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

تعريف

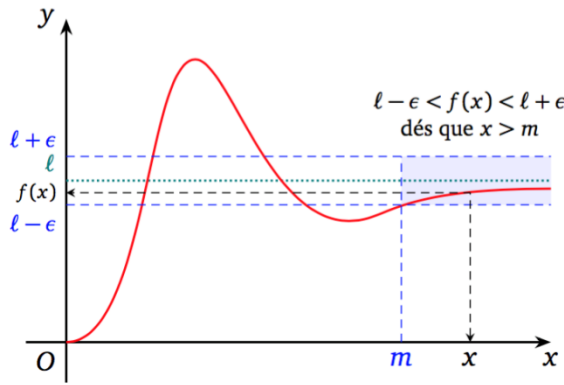
ℓ عدد حقيقي

القول أن للدالة f النهاية ℓ عند $+\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد ℓ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب رمزياً $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ونقول أن $f(x)$ يؤول إلى ℓ لما يؤول x إلى $+\infty$

ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهاية لدالة f عند $-\infty$



تطبيق

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ معناه:

من أجل كل عدد حقيقي

اختياري $\epsilon > 0$ ، يمكن

إيجاد عدد حقيقي m ،

حيث من أجل كل $x > m$:

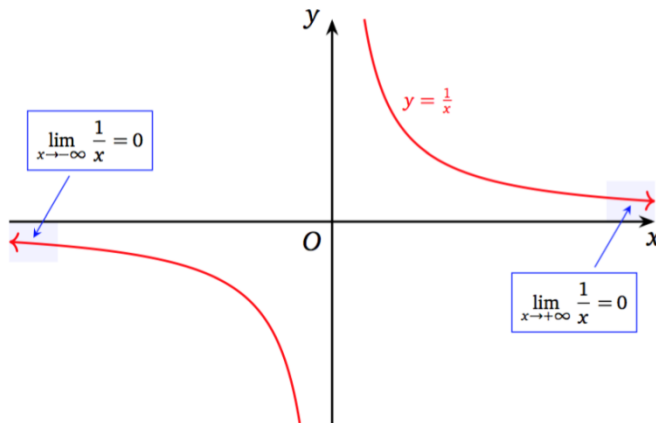
$f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$

التفسير الهندسي: المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ، نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ هو مستقيم مقارب (يوازي محور الفواصل) لمنحني الدالة f عند $+\infty$

أمثلة

■ التمثيل البياني ونهايات الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$:



محور الفواصل هو مقارب للمنحني $\mathcal{H}$ ذو المعادلة $y = \frac{1}{x}$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$

■ لدينا كذلك النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-a)^p} = 0$$

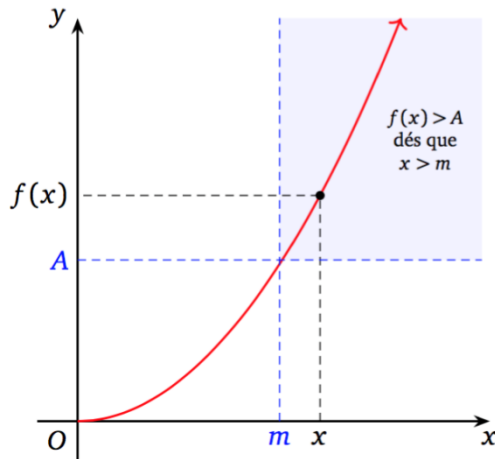
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-a} = 0$$

نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.
نكتب رمزياً $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ونقول أنّ $f(x)$ يؤوّل إلى $+\infty$ ممّا يؤوّل x إلى $+\infty$

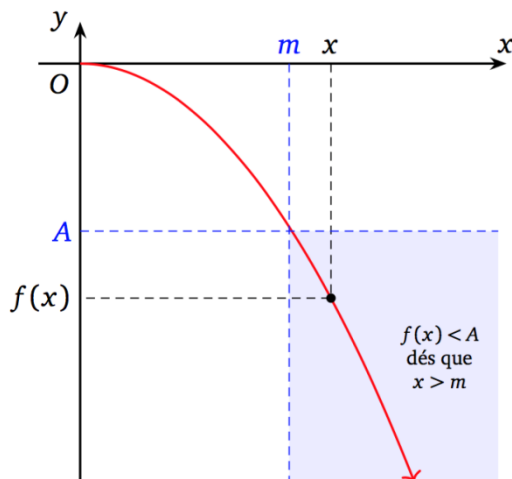


ملاحظة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ تعني:
من أجل كل عدد حقيقي اختياري A ، يُمكن إيجاد عدد حقيقي m ، حيث من أجل كل $x > m$ ، لدينا:
 $f(x) > A$

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $-\infty$ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $]-\infty; A]$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.
نكتب رمزياً $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ونقول أنّ $f(x)$ يؤوّل إلى $-\infty$ ممّا يؤوّل x إلى $+\infty$



ملاحظة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ تعني:
من أجل كل عدد حقيقي اختياري A ، يُمكن إيجاد عدد حقيقي m ، حيث من أجل كل $x > m$ ، لدينا:
 $f(x) < A$

أمثلة

■ نهايات الدالتين $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$ من جدول التغيّرات

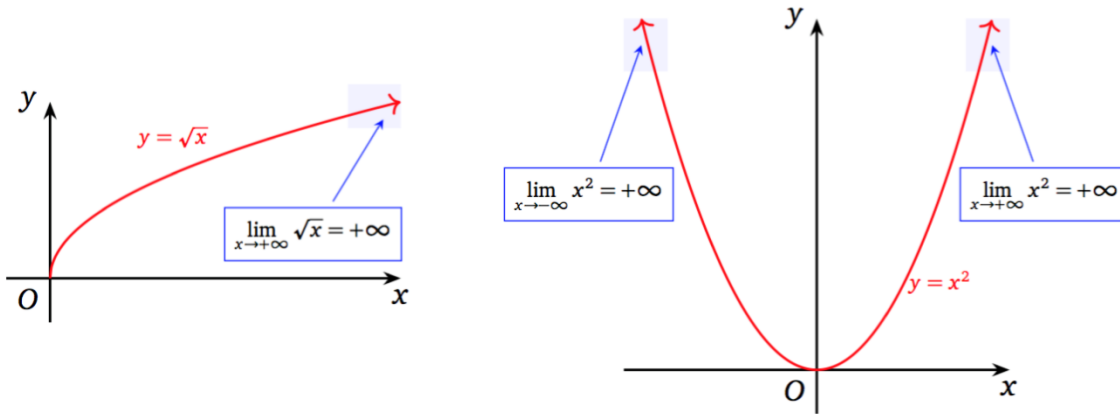
x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

■ التمثيل البياني و النهايات لكل من الدالتين $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$



■ لدينا كذلك النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

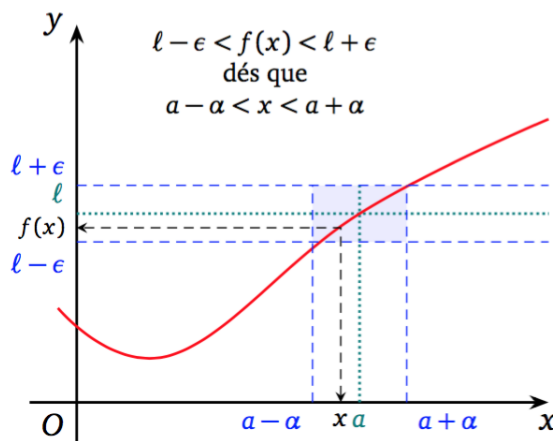
■ بصفة عامة، منحنى الدالة $x \mapsto x^p$ هو متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لمعلم (متعامد) إذا كان p عدد زوجي و متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم إذا كان p عدد فردي، و عليه:

- إذا كان p زوجي فإن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty$
- و إذا كان p فردي فإن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty$

النهاية المنتهية أو غير المنتهية عند عدد حقيقي

تعريف

a و ℓ عددا حقيقيان
القول أن للدالة f النهاية ℓ عند a يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد ℓ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a
نكتب رمزيا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ و نقول أن $f(x)$ تؤول إلى ℓ لما يؤول x إلى a



ملاحظة

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ تعني:
من أجل كل عدد حقيقي
اختياري $\epsilon > 0$ ، يمكن
إيجاد عدد حقيقي $\alpha > 0$ ،
حيث من أجل كل:
 $a - \alpha < x < a + \alpha$
لدينا:
 $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$

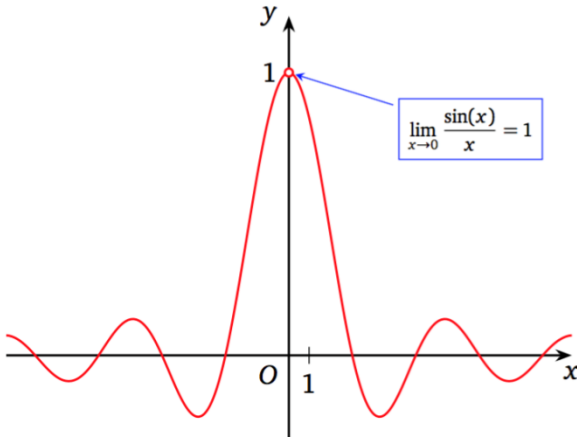
أمثلة

■ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

يُشير كل من الجدول و التمثيل البياني للدالة f أنه كلما أخذ المتغير x قيمة قريبة جداً من 0 (بقيم موجبة أو بقيم سالبة) فإن $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر إلى 1. نكتب عندئذ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



x	$f(x)$
-0.04	0.999733
-0.03	0.999850
-0.02	0.999933
-0.01	0.999983
0	#DIV/0 !
0.01	0.999983
0.02	0.999933
0.03	0.999850
0.04	0.999733

■ النهاية من اليمين و النهاية من اليسار عند عدد

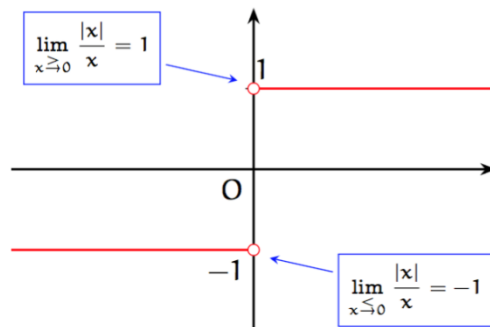
لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

على المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) = -1$ و على المجال $]0; +\infty[$ ، $f(x) = 1$

إذن، ليس للدالة f نهاية عند 0

و في هذه الحالة نقول أن للدالة f نهاية عند 0 من اليمين تساوي 1 و لديها نهاية عند 0 من اليسار تساوي -1



ملاحظة

a عدد حقيقي ينتمي لمجموعة تعريف دالة f . إذا كانت f دالة مرجعية (كثير حدود ، دالة ناطقة ، دالة

جيب ، دالة جيب تمام ، ...) فإن الدالة f تقبل نهاية عند a و :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

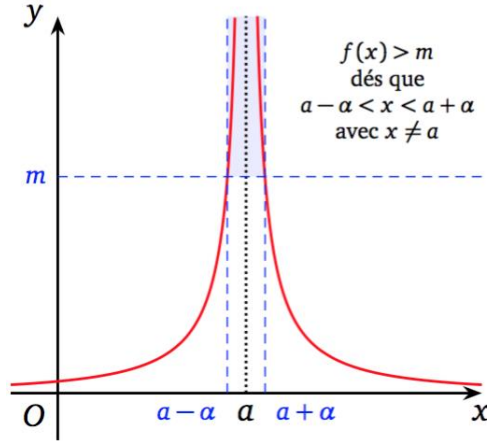
$$\text{مثلاً : } \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a , \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} , \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$$

تنبيه

نقول في هذه الحالة أن الدالة f مستمرة عند العدد a

تعريف

القول أن للدالة f النهاية $+\infty$ عند a يعني أن كل مجال من الشكل $[m; +\infty[$ (مع m عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a
نكتب رمزياً $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ونقول أن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى a



ملاحظة

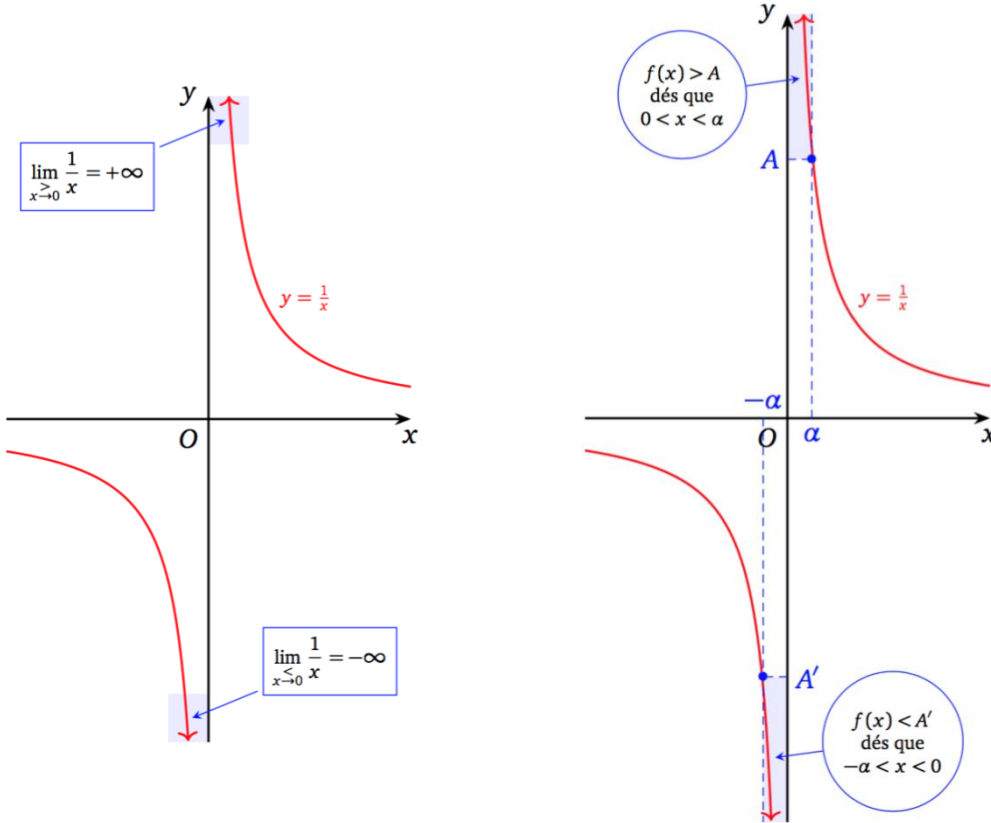
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ تعني:
من أجل كل عدد حقيقي m ،
اختياري m ، يمكن إيجاد
عدد حقيقي $\alpha > 0$ ، حيث
من أجل كل
 $a - \alpha < x < a + \alpha$
لدينا:
 $f(x) > m$

ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهاية $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty; m]$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

أمثلة

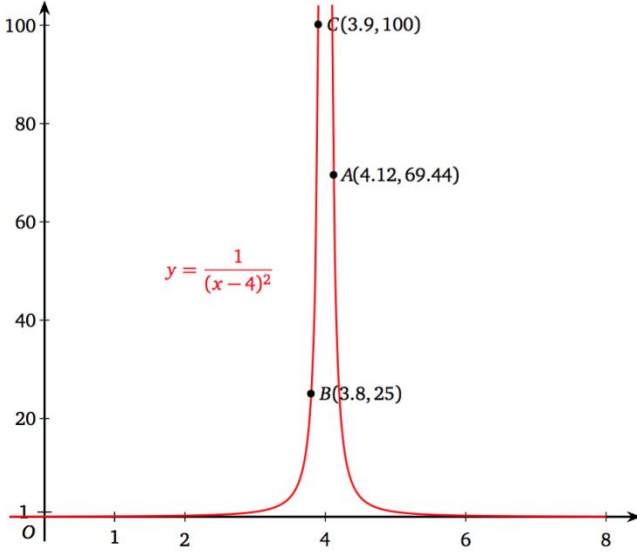
■ التمثيل البياني ونهايات الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ عند 0 من اليمين و من اليسار



■ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{4\}$ بـ

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$$

العدد 4 قيمة ممنوعة للدالة f أي لا يُمكن حساب $f(4)$ لكن إذا أردنا دراسة سلوك الدالة f من أجل قيم x القريبة من 4 ، باستعمال مجداول أو راسم للبيانات ، فإنّه يمكن أن نُعطي التخمين التالي:
يُمكن جعل المقدار $f(x)$ أكبر ما يمكن كما نريد باختيار x قريب من 4 بالقدر الكافي



x	$f(x)$
3.8	25
3.9	100
3.95	400
3.97	1111.11
3.99	10000
3.999	1.00E + 06
4	#DIV/0 !
4.0001	1.00E + 08
4.02	2500
4.06	277.78
4.12	69.44

الطرائق

تمرين محلّول 1 كيف نحسب النهاية عند $+\infty$ باستعمال التعريف ؟

نعلم أنّ نهاية الدالة $x \mapsto \frac{4x-5}{2x+3}$ عند $+\infty$ هي 2
جد عدد حقيقي m حيث :

إذا كان « $x > m$ » فإنّ « $1,95 < f(x) < 2,05$ »



حل

القول أنّ $1,95 < f(x) < 2,05$ يعني أنّ

$$1,95 < \frac{4x-5}{2x+3} < 2,05$$

بإمكاننا فرض $x > 0$ (لأنّ x يؤول إلى $+\infty$)، إذن $2x+3 > 0$ و عليه بضرب كل طرف في $2x+3$

نحصل على : $1,95(2x+3) < 4x-5 < 2,05(2x+3)$ أي : $-0,1x + 5,85 < -5 < 0,1x + 6,15$
نستنتج إذن أنّه :

إذا كان : $-0,1x < -10,85$ و $0,1x > -11,15$ بمعنى : $x > 108,5$ و $x > -111,5$ أي :

$$x > 108,5$$

فإنّ : $1,95 < f(x) < 2,05$

النتيجة : يمكن إذن اختيار $m = 108,5$ (أو أي عدد آخر أكبر من 108,5)



تمرين محلولة 2 كيف نحسب النهاية عند $+\infty$ باستعمال التعريف ؟

1. f هي الدالة المعرفة على المجال $]2; +\infty[$ بـ:
- $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$
- أثبت باستعمال التعريف أن نهاية f عند $+\infty$ هي 0
2. g هي الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:
- $$g(x) = \sqrt{x}$$
- أثبت باستعمال التعريف أن نهاية g عند $+\infty$ هي $+\infty$

حل

1. يكفي أن نبرهن أن كل مجال مفتوح شاملاً العدد 0 يشمل كل القيم $f(x)$
- I هو مجال مفتوح يشمل 0 ، $I =]-\alpha; \alpha[$ مع $\alpha > 0$
- $x > 2$ (لأن x يؤول إلى $+\infty$) إذن القول أن $f(x) \in I$ يكافئ القول أن $\frac{1}{x-2} < \alpha$ ، بمعنى
- $$x - 2 > \frac{1}{\alpha} \text{ أي } x > 2 + \frac{1}{\alpha}$$
- إذن من أجل x كبيراً بالقدر الكافي (أكبر من $2 + \frac{1}{\alpha}$) ، يكون I شاملاً لكل القيم $f(x)$
- النتيجة: إذن للدالة f النهاية 0 عند $+\infty$
2. يكفي أن نبرهن أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$
- ليكن A عدد حقيقي
- نعلم أنه إذا كان x عدداً حقيقياً موجباً فإن: $\sqrt{x} \geq A$ يكافئ $x \geq A^2$
- إذن باختيار x أكبر من A^2 أي كبيراً بالقدر الكافي يكون $\sqrt{x} \geq A$ أي $g(x) \in [A; +\infty[$ بمعنى أن
- المجال $[A; +\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$
- النتيجة: إذن للدالة g النهاية $+\infty$ عند $+\infty$



تمرين محلولة 3 كيف نحسب النهاية عند عدد باستعمال التعريف ؟

- f هي الدالة المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ:
- $$f(x) = (x-1)^2 + 2$$
- نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2
1. ما هو التخمين الذي يمكن طرحه بالنسبة إلى نهاية الدالة f عند 2 ؟
2. في أي مجال يجب اختيار x حتى يكون:
- (أ) $f(x) \in [2, 9; 3, 1]$
- (ب) $f(x) \in [2, 99; 3, 01]$
3. r عدد حقيقي حيث $0 < r < 1$
- (أ) في أي مجال يجب اختيار x حتى يكون $f(x) \in [3-r; 3+r]$
- (ب) ماذا تستنتج علماً أنه يمكن اختيار x صغيراً بالقدر الذي نريد ؟

حل

1. التخمين: إذا كان x قريب من 2، يكون $f(x)$ قريب من $2 + (2 - 1)^2$ ، أي قريب من 3 بمعنى

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

2. (أ) من أجل $2,9 \leq f(x) \leq 3,1$ أي $0,9 \leq (x - 1)^2 \leq 1,1$ ، يُمكن اختيار x بحيث

$$x \in [1,95; 2,04] \text{ أي } 0,95 \leq x - 1 \leq 1,04$$

(ب) من أجل $2,99 \leq f(x) \leq 3,01$ أي $0,99 \leq (x - 1)^2 \leq 1,01$ ، يُمكن اختيار x بحيث

$$x \in [1,995; 2,004] \text{ أي } 0,995 \leq x - 1 \leq 1,00$$

3. (أ) من أجل $3 - r \leq f(x) \leq 3 + r$ أي $1 - r \leq (x - 1)^2 \leq 1 + r$ ، يُمكن اختيار x بحيث

$$\sqrt{1 - r} \leq x - 1 \leq \sqrt{1 + r} \text{ أي } x \in [1 + \sqrt{1 - r}; 1 + \sqrt{1 + r}]$$

(ب) بإمكان اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد، كذلك يمكن اختيار $f(x)$ قريبا من 3 بالقدر الذي

نريد شريطة أن يكون x قريبا من 2 بالقدر الكافي. وهذا يعني أن للدالة f النهاية 3 عند 2



العمليات على النهايات

f و g دالتان لهما نفس مجموعة التعريف D

■ نهاية مجموع الدتين

$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ℓ	ℓ	ℓ	إذا كانت نهاية f :
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ℓ'	و كانت نهاية g :
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell + \ell'$	فإنّ نهاية $f + g$:

ملاحظة

في الجداول التالية، النهايات هي عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ أو عند عدد حقيقي a .
 ℓ و ℓ' هما عددا حقيقيان

■ نهاية جداء الدتين

0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	ℓ	إذا كانت نهاية f :
$\pm\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ℓ'	و كانت نهاية g :
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell \times \ell'$	فإنّ نهاية $f \times g$:

■ نهاية حاصل قسمة الدتين

حالات حيث g غير معدومة

$\pm\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ℓ	ℓ	إذا كانت نهاية f :
$\pm\infty$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	و كانت نهاية g :
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{\ell}{\ell'}$	فإنّ نهاية $\frac{f}{g}$:

حالات حيث g معدومة

0	$-\infty$ أو $\ell < 0$	$-\infty$ أو $\ell < 0$	$+\infty$ أو $\ell > 0$	$+\infty$ أو $\ell > 0$	$\ell > 0$ أو $+\infty$	إذا كانت نهاية f :
0	0^-	0^+	0^-	0^+	0^+ أو 0^-	و كانت نهاية g :
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	فإنّ نهاية $\frac{f}{g}$:

■ حالات عدم التعيين

- توجد أربعة حالات عدم التعيين وهي من الشكل: $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$
- تتطلب حالات عدم التعيين دراسة خاصة في كل حالة

■ النهايات في ما لانهاية

- في ما لا نهاية، نهاية كثير حدود هي نهاية حدّ الأعلى درجة
- في ما لا نهاية، نهاية كسر ناطق هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة

الطرائق

تمرين محلّول 4 كيف نحسب نهايات دالة ناطقة عند أطراف مجموعة تعريفها ؟

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{-x^2 + x + 2}$$

ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

حل

الدالة f معرفة على المجموعة $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

ندرس أولاً، حسب قيم x ، إشارة $-x^2 + x + 2$:

لكثير الحدود $-x^2 + x + 2$ جذرين هما -1 و 2 و عليه لدينا جدول الإشارة التالي:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

■ حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة في البسط وفي المقام هو -2 ، إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

■ كذلك بتطبيق نفس القاعدة نجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

■ $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x + 3) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 + x + 2) = 0$ ومن أجل $-1 < x < 2$ ، $-x^2 + x + 2 > 0$

إذن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + x + 3) = 13$ و $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + x + 2) = 0$ ومن أجل $x < -1$ ، $-x^2 + x + 2 < 0$

إذن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + x + 3) = 13$ و $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + x + 2) = 0$ ومن أجل $-1 < x < 2$ ، $-x^2 + x + 2 > 0$

إذن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 + x + 2) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x + 3) = 4$ ومن أجل $x > 2$ ، $-x^2 + x + 2 < 0$

إذن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$



تمرین محلول 5 كيف نُزيل حالة عدم التعيين باستعمال المرافق أو العامل المشترك ؟

عین نهاية الدالة f عند a في كل حالة من الحالات التالية :

$$a = +\infty \text{ و } f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$a = +\infty \text{ و } f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

$$a = 3 \text{ و } f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$



حل

■ نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = x - \sqrt{x}$ عند $+\infty$

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

من أجل $x > 0$

$$f(x) = x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

■ نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$ عند $+\infty$

لدينا حالة عدم التعيين في البسط من الشكل $+\infty - \infty$

من أجل $x > 0$

$$f(x) = \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

■ نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$ عند 3

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

من أجل $x \neq 3$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \\ &= \frac{(x+1) - 2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} + 2 = 4$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{4}$$



النهايات بالمقارنة

مبرهنة الحصر

مبرهنة

ف، g و h ثلاث دوال معرفة على مجال $I =]b; +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي
إذا كان من أجل كل x من I ، $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ فإن
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

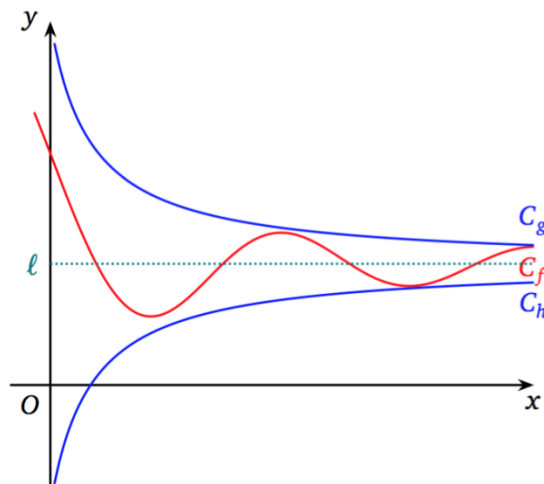
ملاحظة

تمتد المبرهنة في حالة النهاية
عند $-\infty$ أو عند عدد

البرهان

من الفرضيات كل مجال مفتوح شاملاً للعدد ℓ يشمل كل القيم $g(x)$ و $h(x)$ إذن يشمل كل القيم $f(x)$
من أجل x كبيراً بالقدر الكافي (و أكبر من b) لأن $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وعليه حسب تعريف النهاية
عند $+\infty$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



أمثلة

■ نهاية الدالة $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ عند $+\infty$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ إذن بقسمة كل طرف على x نحصل على:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

وبما أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

■ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x) = 3 + \frac{\sin(5x)}{x}$. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

المقارنة في ما لا نهاية

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان على مجال $I =]b; +\infty[$. إذا كان من أجل كل x من I ,

- $f(x) \geq g(x)$ وكان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $f(x) \leq g(x)$ وكان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة

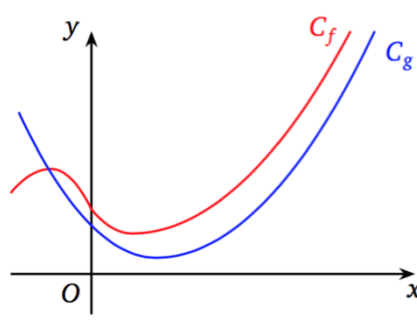
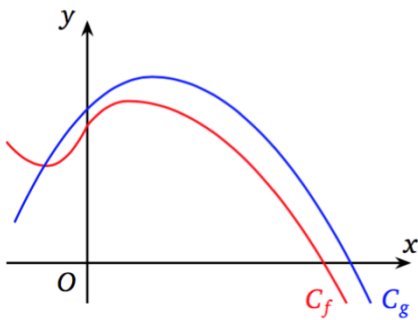
تمتد المبرهنة في حالة
النهايات عند $-\infty$

البرهان

من الفرضيات كل مجال من الشكل $[m, +\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$ فهو يشمل كذلك كل القيم $f(x)$ من أجل x كبيراً بالقدر الكافي (و أكبر من b) لأن $g(x) \leq f(x)$ و عليه حسب تعريف النهاية عند $+\infty$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

بنفس الطريقة نبرهن على الخاصية الثانية



مثال

النهاية عند $+\infty$ للدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^2 + 2 \cos x$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ إذن $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$ و نستنتج

$$x^2 - 2 \leq x^2 + 2 \cos x \leq x^2 + 2$$

$$f(x) \geq x^2 - 2$$

و منه بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = +\infty$ فإن حسب مبرهنة المقارنة في ما لا نهاية فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 \cos x) = +\infty$$

الطرائق

تمرين محلولة 6 كيف نستعمل مبرهنة الحصر لحساب نهاية ؟

f هي دالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$,

$$\frac{2x - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$$

2. استنتج نهاية f عند $+\infty$

الحل

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا ، $-1 \leq \sin x \leq 1$

بإضافة $2x$ لكل طرف نحصل على $2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$
نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ،

$$\frac{2x - 1}{x - 1} \leq \frac{2x + \sin x}{x - 1} \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$$

2. بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = 2$$

فإن ، حسب مبرهنة الحصر ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x - 1} = 2$$



تمرين محلولة 7 كيف نحسب نهاية بالمقارنة في ما لانهاية ؟

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1 \quad \text{و} \quad 1 \leq 2 - \cos x \leq 3$$

2. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \frac{x}{2 - \cos x}$$

أدرس نهاية f عند $-\infty$



حل

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا ، $-1 \leq \cos x \leq 1$

بضرب كل طرف في -1 نحصل على $-1 \leq -\cos x \leq 1$

وبإضافة 2 لكل طرف نستنتج المطلوب الأول وهو : $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$
وباستعمال المقلوب نستنتج المطلوب الثاني وهو :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$$

2. لدينا :

$$\frac{1}{2 - \cos x} \geq \frac{1}{3}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x \leq 0$ ،

$$\frac{x}{2 - \cos x} \leq \frac{x}{3}$$

و بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$$

فإن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2 - \cos x} = -\infty$$



نهاية دالة مركبة

نهاية مركب دالتين

مبرهنة
a, b, c هي أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. و f, g, h هي ثلاث دوال حيث $f(x) = g(h(x))$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ و $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$
البرهان
تقبل دون برهان

مثال: النهاية عند $+\infty$ للدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ

$$h(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$$

لدراسة نهاية الدالة h عند $+\infty$ نكتب $h(x) = g[f(x)]$ مع :

$$g(X) = \sqrt{X} \quad \text{و} \quad X = f(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{X} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

إذن، حسب الخاصية أعلاه، $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$

ملاحظة

بوضع $X = \frac{4x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ نقول
أننا أجرينا تغييراً للمتغير

الطرائق

تمرين محلولة 8 كيف نحسب نهاية دالة مركبة؟

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty; -4[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{x + 4}}$$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

طريقة

لتطبيق المبرهنة على النهاية
عند a للدالة المركبة
 $(x \mapsto g(h(x)))$ ، نبحث أولاً
عن النهاية b للدالة h عند
 a ، ثم نهاية الدالة g عند b

حل

- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 4} = 2$ و $\lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$
- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x + 4} = 2$ و $\lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{2}$
- بما أن $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x - 1}{x + 4} = +\infty$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty$
- بما أن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x - 1}{x + 4} = +\infty$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$



تمرين محلولة 9 كيف نحسب نهاية باستعمال تغيير للمتغير؟

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. ما هي نهاية الدالة $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ؟
2. أحسب نهاية f عند $+\infty$

حل

1. من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$ ، نضع $X = \frac{1}{x}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ إذن $\lim_{X \rightarrow 0} \sin X = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$
 بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ فإنه لا يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$ لأننا أمام حال عدم تعيين من الشكل $+\infty \times 0$
2. لإزالة حالة عدم التعيين، يكفي ملاحظة:

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{X} \sin X = \frac{\sin X}{X}$$

يؤدي هذا التغيير للمتغير للنهية المعلومة $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ و عليه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$



المستقيم المقارب المائل

تعريف

C_f هو التمثيل البياني للدالة f في معلم.
 القول أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + b$ هو مقارب مائل للمنحني C_f بجوار $+\infty$ يعني أن :

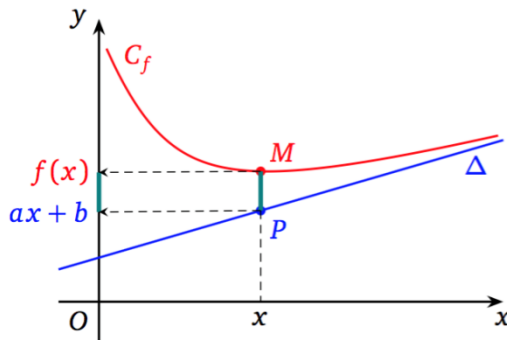
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

تنبيه

نعرف بطريقة مماثلة
 المستقيم المقارب المائل عند $-\infty$

التفسير البياني

ليكن x ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة f . M نقطة من C_f و P نقطة من Δ فاصلتهما x (الشكل)
 في معلم متعامد المسافة PM هي $|f(x) - (ax + b)|$ و عليه من أجل x بجوار $+\infty$ المسافة PM هي قريبة من الصفر، أي: بجوار $+\infty$ المنحني C_f والمستقيم Δ هما متقاربان



الطرائق

تمرين محلولة 10 كيف نعيّن مستقيما مقاربا لمنحني دالة ؟

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

و C هو المنحني الممثل للدالة f في معلمي
ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. أثبت أن المنحني C يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$

حل

بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

نلاحظ أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2 + 1} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ هو مقارب للمنحني C عند $+\infty$



تمرين محلولة 11 كيف ندرس وضعية منحني بالنسبة إلى مستقيمه المقارب ؟

أثبت أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ للمنحني C_f الممثل للدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$$

ثم حدد وضعية C_f بالنسبة إلى Δ



حل

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 1) &= \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (x + 1) \\ &= \frac{-1}{x + 2} \end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + 2} = 0$$

ومنه المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مقارب للمنحني C_f عند $+\infty$

لدراسة وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x + 1)$:

إشارة هذا الفرق هي عكس إشارة $x + 2$ و المبينة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - (x + 1) = \frac{-1}{x + 2}$		+	-

و عليه : في المجال $]-\infty; -2[$ ، المنحني C_f يقع فوق المستقيم Δ و :

في المجال $]2; +\infty[$ ، المنحني C_f يقع تحت المستقيم Δ



مفهوم الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال

الاستمرارية : الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال

تعريف

- f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي a .
- القول أن الدالة f مستمرة عند العدد a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$ أي بمعنى:
- $$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$
- القول أن الدالة f مستمرة على المجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I

أمثلة

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-4\}$ بـ: $f(x) = \frac{x-4}{x+4}$
 f غير مستمرة عند -4 لأنها غير معرفة عند -4
 f مستمرة عند 0 لأن: من جهة $f(0) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ أي $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$
 - لتكن الدالة f المعرفة بالعلاقة: $g(x) = \sqrt{x-4}$
هل الدالة g مستمرة عند 4 ؟ هل هي مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟
 - نعتبر الدالة h المعرفة بما يلي :
- $$h(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$
- هل الدالة h مستمرة عند 1 ؟ هل هي مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟
- نعتبر الدالة k المعرفة بما يلي :
- $$k(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5}, & x \neq -5 \\ 0, & x = -5 \end{cases}$$
- هل الدالة h مستمرة عند -5 ؟ هل هي مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

المعرفة البيانية لدالة مستمرة

بيانياً، تُعرف دالة مستمرة على مجال I عندما يُمكن رسم منحنيتها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (ملاحظة: هذا ليس دليلاً!)

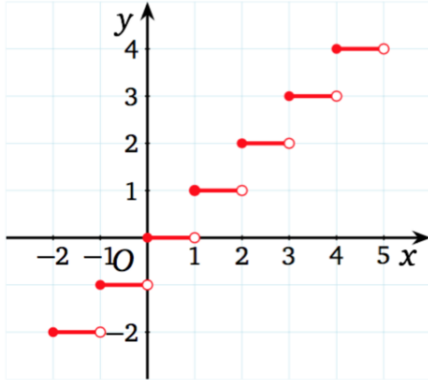
نتائج: استمرارية الدوال المرجعية

- مجموع و جداء دالتين مستمرتين عند a هي دوال مستمرة عند a
- مقلوب دالة مستمرة عند a و غير معدومة عند a هي دالة مستمرة عند a
- إذا كانت الدالة f مستمرة عند a و كانت الدالة g مستمرة عند $f(a)$ فإن الدالة $g \circ f$ مستمرة عند a
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ ، $\cos$ و $|x|$ هي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة والدالة $\sqrt{x}$ هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها
- يُستنتج من هذا أن كل دالة مكتوبة جبرياً على شكل مجموع، جداء أو مركب دوال مرجعية هي كذلك دالة مستمرة على أي مجال من مجموعة تعريفها

مثال لدالة غير مستمرة : الدالة الجزء الصحيح

تعريف

ليكن x عددا حقيقيا. يوجد عدد صحيح وحيد n ، حيث: $n \leq x < n+1$.
نعرف إذن على $\mathbb{R}$ الدالة الجزء الصحيح، التي نرمز لها بالرمز E ، ب: $E(x) = n$ أو $[x] = n$



مثلا

$$E(-4,12) = -5, E(\pi) = 2, E(3) = 3, E(2,3) = 2$$

التمثيل البياني للدالة الجزء الصحيح

إذا كان n عدد صحيح، فإن من أجل كل عدد حقيقي x من

$$E(x) = n, [n; n+1[$$

الدالة E غير مستمرة على $\mathbb{R}$ ، لا تقبل نهاية عند كل عدد صحيح.

أنواع مختلفة لدوال غير مستمرة

هل توجد أنواع مختلفة لدوال غير مستمرة؟ نعم!

تكون دالة f مستمرة عند عدد a إذا، و فقط إذا كانت لهذه الدالة نهاية من اليمين عند a و لها نهاية من

اليسار عند a وهاته النهايتين تساويان $f(a)$

و عليه تكون f غير مستمرة عند a لعدة أسباب:

السبب الأول: للدالة f نهاية من اليمين عند a ، نهاية من اليسار عند a ، لكن النهايتين غير متساويتين

مثال: الدالة الجزء الصحيح عند 1 مثلاً

السبب الثاني: للدالة f نهاية من اليمين عند a تساوي النهاية من اليسار عند a ، لكن الدالة f هي غير معرفة

عند a أو تأخذ قيمة تختلف عن النهاية المشتركة. مثال ذلك الدالة $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ من أجل $x \neq 0$ ، هذه الدالة

غير معرفة عند 0 لكن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

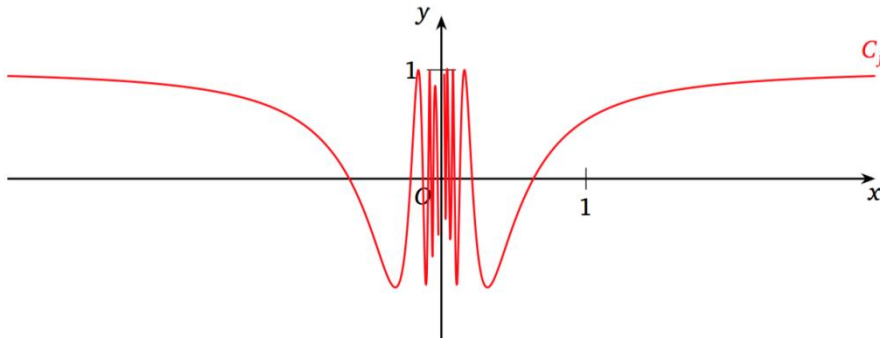
يُمكن هنا أن نُمدد الدالة f بالاستمرارية، بتعريف الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

نحصل إذن على دالة g مستمرة على $\mathbb{R}$

السبب الثالث: ليس للدالة f نهاية من اليمين أو من اليسار عند a . مثال ذلك الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ من أجل } x \neq 0 \text{ و } f(0) = 0 \text{ و الممثلة بيانياً بـ:}$$



ملاحظة

مثال لدالة معرفة على $\mathbb{R}$ و

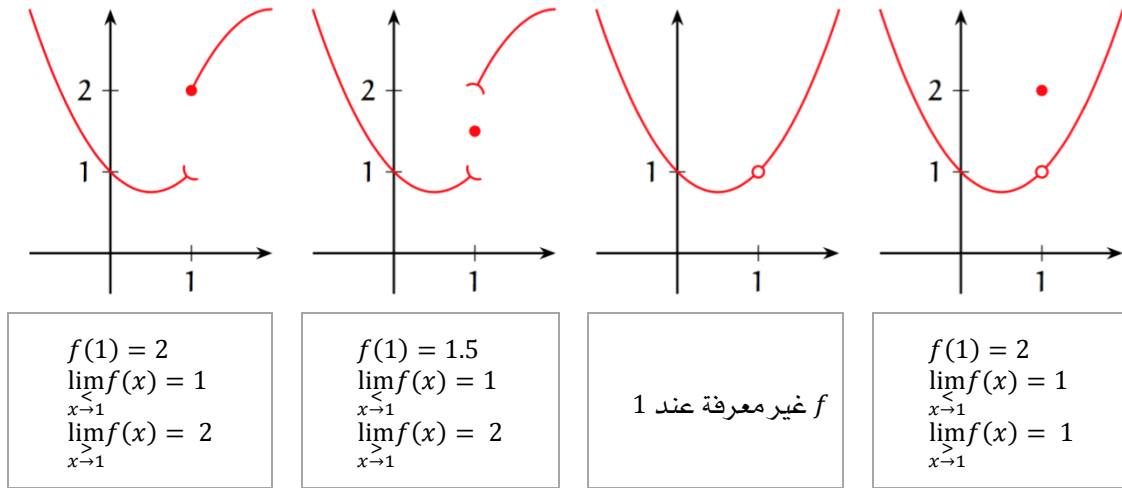
غير مستمرة عند كل عدد

حقيقي (خارج البرنامج !):

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

مثال

الدوال التالية الممثلة بمنحنيات غير مستمرة عند 1 مع التبرير



الطرائق

تمرين محلول 12 كيف ندرس الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال ؟

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[-1; 3]$ بما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in [-1; 1] \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & : x \in]1; 3] \end{cases}$$

1. أدرس استمرارية الدالة g عند 1
2. هل الدالة g مستمرة على المجال $[-1; 3]$ ؟ أذكر المجالات أين تكون هذه الدالة مستمرة.
3. أنشئ المنحني C_g

الحل

1. لدينا $g(1) = 1^2 - 2 \times 1 = -1$

و $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) = 2$

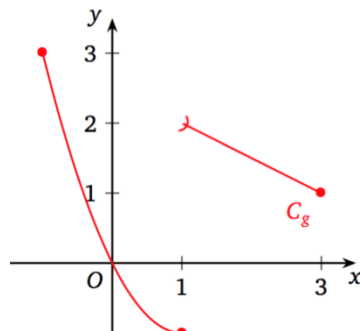
النهاية عند 1 من اليمين تختلف عن النهاية عند 1 من اليسار ، إذن الدالة g ليست لها نهاية عند 1 و منه الدالة g غير مستمرة عند 1

2. الدالة g ليست مستمرة على المجال $[-3; 2]$ لأنها ليست مستمرة عند 1

لكن الدالة g مستمرة على المجال $[-1; 1]$ لأن $x \mapsto x^2 - 2x$ دالة كثير حدود. كذلك الدالة g

مستمرة على المجال $]1; 3]$ لأن $x \mapsto -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ دالة كثير حدود

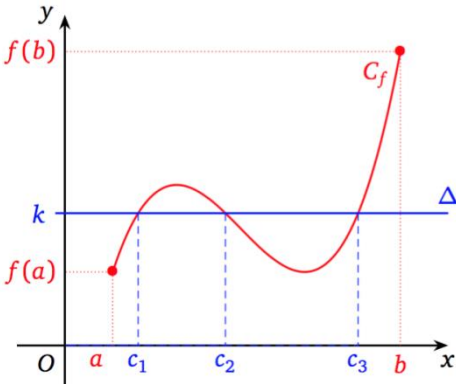
المنحني :



الدوال المستمرة و حل المعادلات (مبرهنة القيم المتوسطة)

مبرهنة القيم المتوسطة (البينية)

مبرهنة
f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a; b]$ من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$
البرهان
البرهان يتطلب دراسة المتتاليات المتجاورتان (درس المتتاليات)



التفسير الهندسي

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم Δ ذو المعادلة $y = k$ ، يقطع المنحني C_f على الأقل في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b

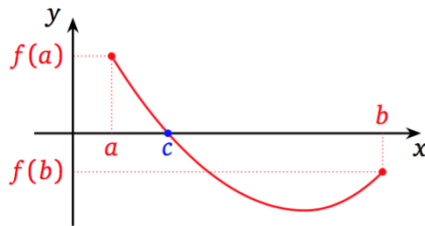
التفسير بمفهوم المعادلات

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a; b]$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلاً c محصور بين a و b

نتيجة

إذا كانت مستمرة على المجال $[a; b]$ و كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$



الطرائق

تمرين محلولة 13 كيف نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة ؟

1. أثبت أن المعادلة $x^3 - 4x = 3$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[2; 3]$

2. لتكن (E) المعادلة $\cos(2x) = 2 \sin x - 2$

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلاً في المجال $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$

حل

هريقة

- لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a; b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة:
- نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$
- نتحقق من استمرارية الدالة f على $[a; b]$
- نتحقق أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

1. المعادلة $x^3 - 4x = 3$ هي من الشكل $f(x) = 3$ مع f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = x^3 - 4x$$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود

$$f(2) = 0 \text{ و } f(3) = 15$$

بما أن 3 محصور بين 0 و 15 فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يمكن التأكد أن المعادلة $f(x) = 3$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[2; 3]$

2. المعادلة (E) تكافئ $\cos(2x) - 2\sin(x) + 2 = 0$ بمعنى $f(x) = 0$ مع f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \cos(2x) - 2\sin(x) + 2$$

f هي مركب دوال مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي كذلك مستمرة على $\mathbb{R}$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} \text{ و } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

بما أن $0 < f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ (أي 0 محصور بين -1 و $\frac{7}{2}$) فإن مبرهنة القيم المتوسطة تسمح لنا

بالتأكد أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$

الدوال المستمرة والرتيبة تماما على مجال $[a; b]$

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a; b]$

البرهان

نفرض أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a; b]$

وجود الحل: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a; b]$ حيث

$$f(c) = k \text{ أي المعادلة } f(x) = k \text{ تقبل على الأقل حلا في المجال } [a; b]$$

وحدانية الحل: f متزايدة تماما على المجال $[a; b]$. إذن إذا كان x من المجال $[a; b]$ حيث $x < c$ فإن

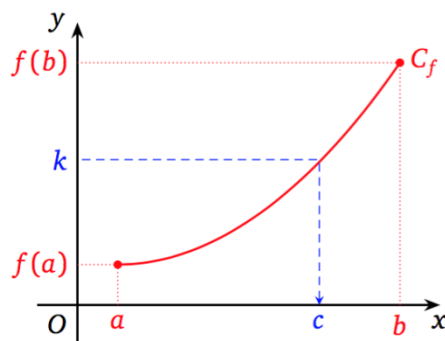
$$f(x) < f(c) \text{ أي } f(x) < k \text{ و إذا كان } x \text{ من المجال } [a; b] \text{ حيث } x > c \text{ فإن } f(x) > f(c) \text{ أي } f(x) > k$$

النتيجة: c هو الحل الحقيقي الوحيد من المجال $[a; b]$ للمعادلة $f(x) = k$

ملاحظة: الأسهم المائلة في جدول تغيّرات دالة تترجم استمرارية ورتابة الدالة على المجال المعتبر. فمثلا يسمح

لنا جدول التغيّرات التالي بتأكيد أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل c كحلاً وحيداً في المجال $[a; b]$

x	a	c	b
f	$f(a)$	k	$f(b)$



تمديد مبرهنة القيم المتوسطة إلى حالات أخرى

تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة ورتيبة تماما على مجال مفتوح أو مغلق من إحدى الجهتين فقط، محدود أو غير محدود تماما. فيما يلي ثلاثة أمثلة:

x	a	c	$+\infty$
f	$f(a)$	k	$+\infty$

x	a	c	b
f	$f(a)$	k	ℓ

x	$-\infty$	c	b
f	ℓ	k	$-\infty$

من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[f(a); +\infty[$ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a; +\infty[$

من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[f(a); \ell[$ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a; b[$

من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $]-\infty; \ell]$ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty; b]$

الطرائق

تمرين محلولة 14 كيف نعين عدد حلول معادلة و تعيين إشارة دالة من جدول التغيرات ؟

جدول التغيرات التالي هو لدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$. عيّن عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f	0	-3	1	$-\infty$

حل

- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2]$ و $f(-2) = -3$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; -2]$ لدينا $f(x) < 0$ و عليه: المعادلة $f(x) = 0$ ليس لها حل في المجال $]-\infty; -2]$
 - الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2; 2]$ و 0 ينتمي إلى المجال $[-2; 2]$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-2; 2]$
 - الدالة f متناقصة تماما على المجال $[2; +\infty[$ و 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty; 1]$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $[2; +\infty[$
- النتيجة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β في $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	α	2	β	$+\infty$
f	0	-3	0	1	0	$-\infty$

- إشارة الدالة f : من جدول تغيرات الدالة f نستنتج إشارتها :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



إزالة حالات عدم التعيين < باستعمال التحليل

f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1. تحقق أن لدينا حالة عدم تعيين لما يؤول x إلى $+\infty$
2. أثبت أنه من أجل كل $x > 0$ ، $f(x) = x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$
3. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

حل

1. عند $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ إذن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$
2. من أجل $x > 0$ ،

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} = x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) = x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

3. بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x} - 2$

إزالة حالات عدم التعيين < باستعمال المرافق

f هي الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - x}$$

1. تحقق أن لدينا حالة عدم تعيين لما يؤول x إلى $+\infty$
2. أضرب و أقسم العبارة $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - x}$ بالعبارة المرفقة $\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - x}$
3. أثبت أنه من أجل كل $x \geq 1$ ،

$$f(x) = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

4. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

حل

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2) = +\infty$ و بوضع $X = x^2 + 2$ يكون $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ إذن حسب نهاية مركب دالتين فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} = +\infty$ كذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و بالتركيب نستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$

نحصل إذن على حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

2. من أجل $x \geq 1$ ،

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x} &= \frac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}\end{aligned}$$

3. من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2} &= \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = x \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} \\ \sqrt{x^2-x} &= \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = |x| \sqrt{1-\frac{1}{x}} = x \sqrt{1-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}} \\ &= \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} \\ &= \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\end{aligned}$$

4. بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right) = 1$$

فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $]-\infty; -1]$ بـ: $g(x) = x + 2 + \sqrt{x^2+x}$

إزالة حالات عدم التعيين < باختزال

f هي الدالة المعرفة على $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(2x-1)}$$

1. ما هي النهاية عند 2 للدالة $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند 2 ؟

2. أثبت أنه من أجل كل $x \in \mathcal{D}$ ،

$$f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$$

3. استنتج نهاية الدالة f عند 2

حل

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)(2x-1) = 0$$

نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

2. العدد 2 جذر لـ $x^2 - 5x + 6$ إذن بتحليل $x^2 - 5x + 6$ نحصل على:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

و من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathcal{D}$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(2x-1)} = \frac{x-3}{2x-1}$$

3. من النتيجة الأخيرة

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{2x-1} = -\frac{1}{3}$$

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

إزالة حالات عدم التعيين < باستعمال العدد المشتق

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

1. ما هي النهاية عند 0 لكل من الدالتين $x \mapsto \cos x - 1$ و $x \mapsto x$ ؟

هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟

2. باستعمال العدد المشتق للدالة $x \mapsto \cos x$ عند 0، أحسب نهاية الدالة f عند 0

حل

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$$

نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

2. الدالة $g: x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق عند 0 هو $g'(0) = -\sin(0) = 0$

لدينا:

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

إذن باستعمال تعريف قابلية اشتقاق الدالة $x \mapsto \cos x$ عند 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1$$

تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

السلوك التقاربي < المستقيم المقارب و المنحني المقارب

المستقيم المقارب

1. $\mathcal{C}_f$ هو المنحني الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$$

(أ) لماذا يُمكن التأكيد بأنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

(ب) حدد الوضعية النسبية لـ Δ و $\mathcal{C}_f$

(ج) هل المنحني $\mathcal{C}_f$ يقبل مستقيما مقاربا عند $-\infty$ ؟

2. $\mathcal{C}_f$ هو المنحني الممثل للدالة f المعرفة على $]-3, +\infty[$ بما يلي

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x + 3}$$

درجة البسط أكبر بواحدة من درجة المقام، يُمكن إذن توقع وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني f عند

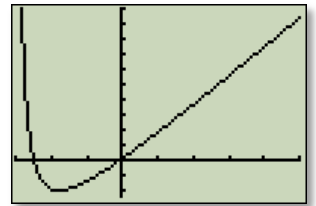
$+\infty$ وهذا ما يُمكن كذلك تخمينه على شاشة الآلة الحاسبة البيانية في الهامش

(أ) أثبت أنّه يوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 3$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 3}$$

(ب) استنتج أنّ المنحني f يقبل مستقيما مقاربا Δ يطلب تعيين معادلة له. أدرس وضعية المنحني f بالنسبة

إلى Δ



المنحنيات المقاربة

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

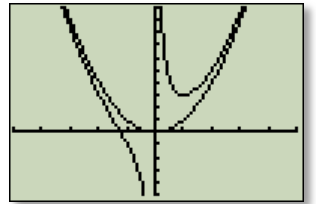
و $\mathcal{C}_f$ هو تمثيلها البياني

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$

2. ما هو التفسير الهندسي بالنسبة للمنحني $\mathcal{C}_f$ و القطع المكافئ Γ ذو المعادلة $y = x^2$ بجوار $+\infty$ ؟

(لاحظ المنحنيين على شاشة آلة حاسبة بيانية في الهامش)

3. أدرس حسب قيم x ، الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}_f$ و Γ



حل

المستقيم المقارب

1. (أ) بما أنّ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x}$$

فإنّ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

أي المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

(ب) إشارة الفرق $f(x) - (x + 2)$ هي إشارة $\frac{1}{x}$ و عليه

• من أجل $x < 0$ فإنّ $\frac{1}{x} < 0$ و منه المنحني $\mathcal{C}_f$ يقع تحت المستقيم Δ

• من أجل $x > 0$ فإنّ $\frac{1}{x} > 0$ و منه المنحني $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ

(ج) بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ فإن المنحني C_f يقبل كذلك Δ كمستقيم مُقارب عند $-\infty$

2. (أ) بإنجاز القسمة الإقليدية لكثير الحدود $2x^2 + 5x$ على $x + 3$ أو بتوحيد مقام العبارة $ax + b + \frac{c}{x+3}$

ثم المطابقة نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -3$:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+3}$$

3. (ب) بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+3} = 0 \quad \text{و} \quad f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x+3}$$

فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$$

أي المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مُقارب للمنحني C_f عند $+\infty$

(ب) إشارة الفرق $f(x) - (2x - 1)$ هي إشارة $\frac{3}{x+3}$ (أي إشارة $x + 3$) و عليه

- من أجل $x < -3$ فإن $\frac{3}{x+3}$ و منه المنحني C_f يقع تحت المستقيم Δ
- من أجل $x > -3$ فإن $\frac{3}{x+3} > 0$ و منه المنحني C_f يقع فوق المستقيم Δ

المنحنيات المقاربة

1. من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

2. في ما لا نهاية $(+\infty)$ ، $\frac{2}{x}$ يتوّل إلى الصفر و $f(x)$ نفس سلوك x^2 أي x يتوّل إلى $+\infty$ فإن المنحني C_f

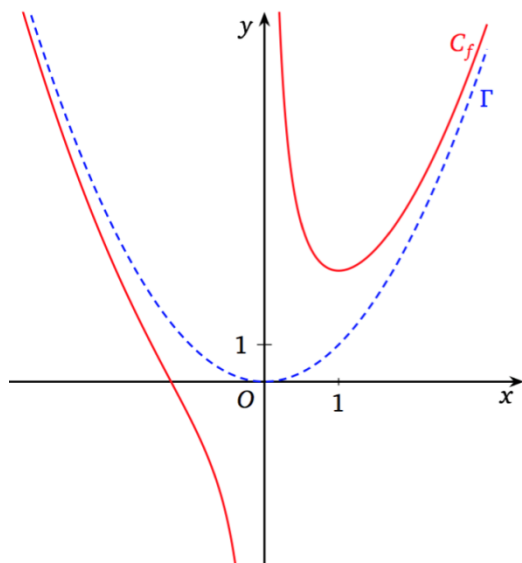
يقترّب أكثر فأكثر إلى القطع المكافئ Γ . نقول في هذه الحالة أن المنحني Γ هو منحنى مقارب للمنحنى

C_f عند $+\infty$ (و يكون كذلك C_f مقارب لـ Γ عند $+\infty$)

3. من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: إشارة الفرق $f(x) - x^2$ هي إشارة $\frac{2}{x}$ و عليه

- من أجل $x < 0$ فإن $\frac{2}{x} < 0$ و منه المنحني C_f يقع تحت المستقيم Γ
- من أجل $x > 0$ فإن $\frac{2}{x} > 0$ و منه المنحني C_f يقع فوق المستقيم Γ

التمثيلان البيانيان C_f و Γ :



ملاحظة

إذا أمكن كتابة عبارة

الدالة f على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

فإن المستقيم ذو المعادلة

$y = ax + b$ هو مقارب

للمنحني C_f عند $+\infty$

ملاحظة

إذا أمكن كتابة عبارة

الدالة f على الشكل :

$$f(x) = g(x) + \varphi(x)$$

مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

فإن المنحنى ذو المعادلة

$y = g(x)$ هو مقارب

للمنحني C_f عند $+\infty$

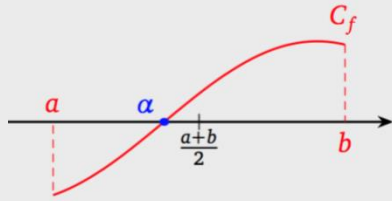
إيجاد حصر لحل معادلة باستعمال طريقة التنصيف

1. **المبدأ** : بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة ورتبية تماماً على مجال $[a; b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[a; b]$

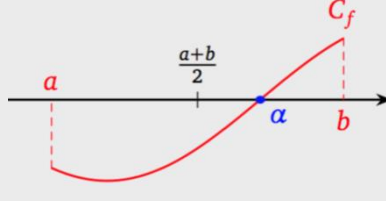
طريقة التنصيف (dichotomie) هي طريقة تسمح تدريجياً بالحصول على حصر أدق للعدد α

ماذا يمكن القول عن α إذا كان للعددين $f(a)$ و $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ نفس الإشارة ؟

(ب) إشارتين مختلفتين ؟



(أ) نفس الإشارة ؟



2. دراسة مثال

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[-2; -1]$. احسب $f(-2)$ و $f(-1)$ استنتج أنه في المجال $[-2; -1]$ ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α

للحصول على حصر أدق لـ α نتبع المنهجية التالية :

- المرحلة الأولى : $-1,5$ هو مركز المجال $[-2; -1]$ ، احسب $f(-1,5)$ استنتج حصرأ أدق للعدد α
- المرحلة الثانية : $-1,75$ هو مركز المجال $[-2; -1,5]$ ، احسب $f(-1,75)$ استنتج حصرأ آخر أدق للعدد α

حل

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[-2; -1]$. $f(-2) = -3$ و $f(-1) = 1$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[-2; -1]$ و عليه $-2 < \alpha < -1$
- المرحلة الأولى : $f(-1,5) = 0,125$ إذن $f(-2)$ و $f(-1,5)$ مختلفان في الإشارة و عليه حسب المبدأ فإن α ينتمي إلى المجال $[-2; -1,75]$ أي $-2 < \alpha < -1,75$
- المرحلة الثانية : $f(-1,75) = -1,109$ و $f(-2)$ و $f(-1,75)$ من نفس الإشارة. و عليه حسب المبدأ فإن α ينتمي إلى المجال $[-1,75; -1,5]$ أي $-1,75 < \alpha < -1,5$

تمرين مع حل نموذجي < دراسة دالة ناطقة

تمرين مع حل نموذجي < دراسة دالة ناطقة

الهدف من هذه المسألة هو دراسة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 10}{x^2 - 4x + 9}$$

ليكن C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس من المستوي (الوحدة: 2 cm)

الجزء الأول: دراسة دالة مساعدة

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x) = \frac{4x^2 - 16x - 4}{(x^2 - 4x + 9)^2}$$

1. أدرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2. نقبل أن جدول تغيّرات الدالة g هو التالي

x	$-\infty$	x_1	2	x_2	$+\infty$
g					

(i) احسب $g(2)$

(ب) استنتج من الأسئلة السابقة، قيم x التي تحقق $x > -1$. برّر الإجابة

الجزء الثاني: دراسة الدالة f وإنشاء تمثيلها البياني

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) = x - 2 + \frac{-4x + 8}{x^2 - 4x + 9}$$

2. (أ) أثبت أن الدالة المشتقة f' للدالة f تحقق:

$$f'(x) = 1 + g(x), \quad x \text{ من أجل كل عدد حقيقي}$$

(ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f

3. أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

4. (أ) أثبت أن $A(2; 0)$ هي مركز تناظر للمنحني C

(ب) أثبت أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x - 2$ هو مقارب للمنحني C

5. أدرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ

6. أنشئ المستقيم Δ و المنحني C_f

حل

الجزء الأول

1. g هي دالة ناطقة، نهايتها عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \text{ و عليه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ وبطريقة مماثلة نبرهن أن}$$

$$g(2) = -\frac{4}{5} = -0,8 \quad (\text{أ})$$

(ب) g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; x_1]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ إذن $g(x) > 0 > -1$ على المجال $]-\infty; x_1]$

و g متناقصة تماماً على المجال $[x_1; 2]$ و $g(2) = -0,8 > -1$ إذن $g(x) \geq -0,8$ على المجال $[x_1; 2]$.

نبرهن بطريقة مماثلة أن $g(x) > -1$ على المجال $[2; x_2]$ و على المجال $[x_2; +\infty[$

و عليه: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > -1$

x	$-\infty$	x_1	2	x_2	$+\infty$
g	0		$-\frac{4}{5}$		0

تبرير آخر: الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$

و $(2) = -\frac{4}{5} = -0,8$ هي القيمة الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x ،

$g(x) \geq -0,8 > -1$ وهو المطلوب

الجزء الثاني

1. من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\begin{aligned} x - 2 + \frac{-4x + 8}{x^2 - 4x + 9} &= \frac{(x - 2)(x^2 - 4x + 9) - 4x + 8}{x^2 - 4x + 9} \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 10}{x^2 - 4x + 9} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2. أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{-4(x^2 - 4x + 9) - (-4x + 8)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 9)^2} \\ &= 1 + \frac{-4x^2 + 16x - 36 + 8x^2 - 16x - 16x + 32}{(x^2 - 4x + 9)^2} \\ &= 1 + \frac{4x^2 - 16x - 4}{(x^2 - 4x + 9)^2} \\ &= 1 + g(x) \end{aligned}$$

ب) حسب الجزء الأول، من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > -1$ ، إذن $1 + g(x) > 0$ ، أي: $f'(x) > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

$$3. \text{ أ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

نبرهن كذلك أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\begin{aligned} f(2+x) + f(2-x) &= 2+x-2 + \frac{-4(2+x)+8}{(2+x)^2-4(2+x)+9} \\ &= +2-x-2 + \frac{-4(2-x)+8}{(2-x)^2-4(2-x)+9} \\ &= \frac{-4x}{4+x^2-8+9} + \frac{4x}{4+x^2-8+9} \\ &= \frac{-4x+4x}{x^2+5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن النقطة $A(2; 0)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$.

ملاحظة

لإثبات أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$

مركز تناظر لمنحنى دالة f

يكفي التحقق من المساواة

$$f(\alpha+x) + f(\alpha-x) = 2\beta$$

5. أ) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) - (x - 2) = \frac{-4x + 8}{x^2 - 4x + 9}$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

كذلك :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

النتيجة : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x - 2$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

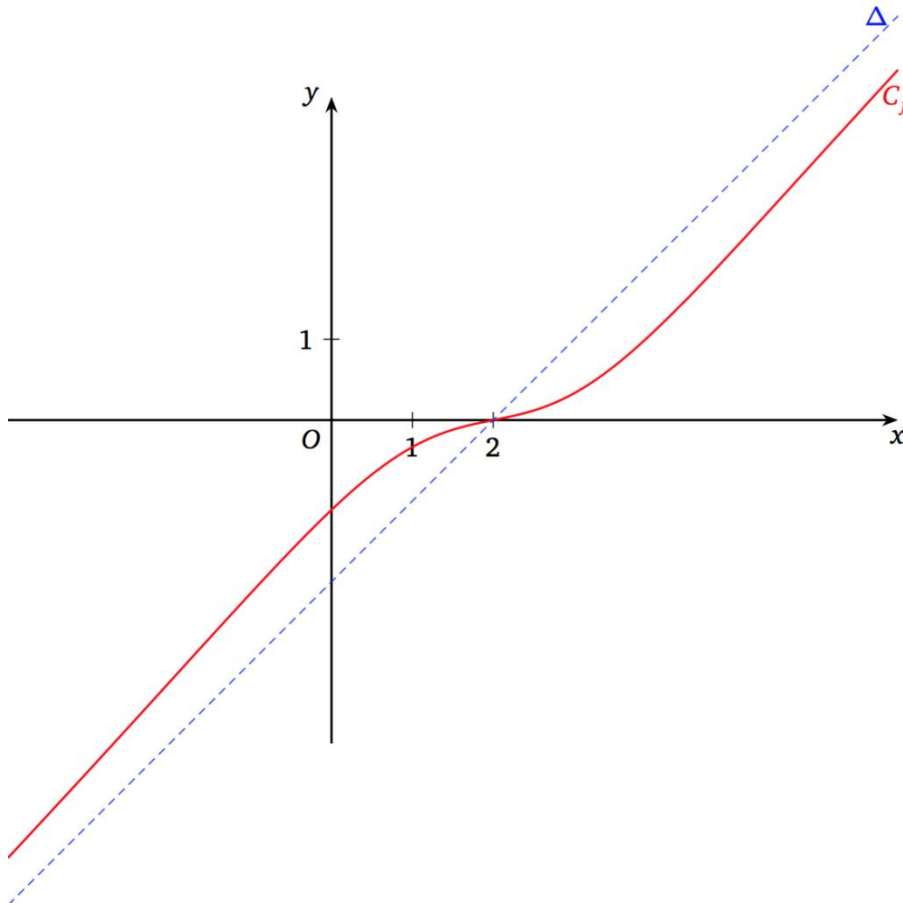
ب) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) - (x - 2) = \frac{-4x + 8}{x^2 - 4x + 9}$$

بما أن $x^2 - 4x + 9 > 0$ فإن إشارة $f(x) - (x - 2)$ هي إشارة $-4x + 8$ أي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-4x + 8$	+	0	-

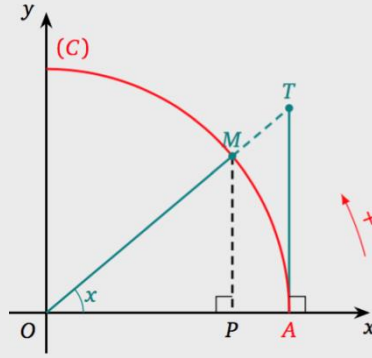
- من أجل $x < 2$ ، $f(x) - (x - 2) > 0$ إذن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ في المجال $]-\infty; 2[$
 - من أجل $x > 2$ ، $f(x) - (x - 2) < 0$ إذن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع تحت المستقيم Δ في المجال $]2; +\infty[$
 - و $\mathcal{C}_f$ يقطع المستقيم Δ في النقطة ذات الفاصلة 2
6. التمثيل البياني للدالة f



طريقة هندسية لإثبات أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

الهدف هو حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

نفرض أن $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ ونعتبر الشكل التالي :



(C) هي الدائرة المثلثية و x هو القيس الرئيسي بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$

نرمز بـ $\mathcal{A}(OPM)$ لمساحة المثلث OPM ، $\mathcal{A}(OAT)$ لمساحة المثلث OAT و S لمساحة القطاع الدائري (OAM)

$$\mathcal{A}(OPM) = \frac{\cos x \sin x}{2} \quad \text{و} \quad S = \frac{x}{2} \quad \text{و} \quad \mathcal{A}(OAT) = \frac{\tan x}{2}$$

2. بملاحظة أن

$$\mathcal{A}(OPM) \leq S \leq \mathcal{A}(OAT)$$

أثبت أن

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

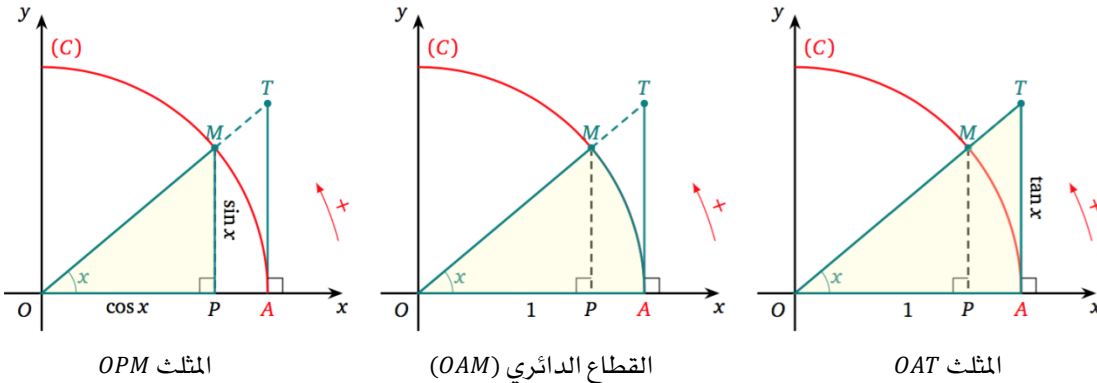
3. استنتج

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حل

بشروط النص و رموز الشكل، x هو كذلك القيس الرئيسي بالراديان للزاوية الهندسية $\widehat{AOM}$ و هو كذلك طول القوس $\widehat{AM}$. نعلم أن $OA = 1$ ، $OP = \cos x$ و $MP = \sin x$

الشكل التالي يوضح كل المعطيات



1. مساحة مثلث قائم هي نصف جداء طول القاعدة في الارتفاع. و عليه

مساحة المثلث OAT هي :

$$\mathcal{A}(OAT) = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

و مساحة المثلث OPM هي :

$$\mathcal{A}(OPM) = \frac{OP \times PM}{2} = \frac{\cos x \times \sin x}{2} = \frac{\cos x \sin x}{2}$$

أما مساحة القطاع الدائري (OAM) فهي معرفة بـ

$$S = \frac{1}{2} \alpha r^2$$

حيث α هي زاوية القطاع الدائري (OAM) و r هو طول نصف القطر، بما أن $r = 1$ و $\alpha = x$ فإن :

$$S = \frac{1}{2} \times x \times OA^2 = \frac{x}{2}$$

2. باستعمال الحصر التالي

$$\mathcal{A}(OPM) \leq S \leq \mathcal{A}(OAT)$$

و من نتائج السؤال الأول :

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

بالضرب في 2 و بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ نحصل على

$$\cos x \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

بالقسمة على $\sin x$ ثم باستعمال المقلوب نجد :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad [1]$$

3. من [1] و علما أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

نستنتج بتطبيق مبرهنة الحصر أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

تذكير : القطاع الدائري

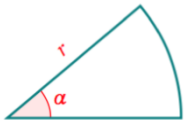
يتميز القطاع الدائري بزاوية α و نصف قطر r .

المساحة S للقطاع الدائري متناسبة مع الزاوية α . نعلم أن مساحة القرص

ذو نصف القطر r (أي القطاع الدائري الذي زاويته 2π) هي πr^2

تسمح لنا الطريقة الثلاثية بالنتيجة التالية :

$$S = \frac{1}{2} \alpha r^2$$



تمارين للتعمق

النهايات بالمقارنة

05 عيّن، باستعمال مبرهنات النهايات بالمقارنة، النهايات التالية

$$\text{■ } f(x) = 2x + \sin x \text{ عند } +\infty, \text{ عند } -\infty$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \text{ عند } +\infty$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{x}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \text{ عند } +\infty$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{x + \sin x}{x - \sin x} \text{ عند } -\infty$$

الاستمرارية

06 f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2; 3]$ بما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \in [-2; 1[\\ x + p & : x \in [1; 3] \end{cases}$$

p عدد حقيقي

1. نختار $p = 1$. أنشئ المنحني C_f الممثل للدالة f

أ) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2; 1[$ ؟ هل هي مستمرة

على المجال $[1; 3]$ ؟

ب) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2; 3]$ ؟

2. كيف يتم اختيار قيمة p حتى تكون f مستمرة على المجال

$[-2; 3]$ ؟

07 في كل حالة، هل يُمكن تعيين العدد الحقيقي k الذي من

أجله تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ بـ:

1. f هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2, & x < 3 \\ k, & x = 3 \\ 4x - 25, & x > 3 \end{cases}$$

2. f هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$(x) = \begin{cases} (2x + 1)^3, & x < -1 \\ 5x + 4, & -1 \leq x \leq 5 \\ k, & x > 5 \end{cases}$$

حساب النهايات

01 في كل حالة، أدرس النهايات المقترحة للدالة f

$$\text{■ } f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \text{ عند } +\infty, \text{ عند } -\infty, \text{ عند } 1, \text{ عند } -2$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} \text{ عند } +\infty, \text{ عند } -\infty, \text{ عند } 3, \text{ عند } -3$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \text{ عند } +\infty, \text{ عند } 1$$

$$\text{■ } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \text{ عند } +\infty$$

$$\text{■ } f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x \text{ عند } -\infty$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \text{ عند } 3$$

$$\text{■ } f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3} \text{ عند } 2$$

02 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$$

1. عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$

2. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي :

$$f(x) = -\frac{4}{x - \sqrt{x^2 + 4}}$$

3. استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$

03 f هي الدالة المعرفة على $]-5; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

2. جد هذه النهاية الأخيرة بتعيين عبارة $f(f(x))$

04 g هي الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ التي تحقق :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{و} \quad g(0) = 1$$

و f هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

و ليكن C_f التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس

$(0; \vec{i}, \vec{j})$

1. عيّن نهاية الدالة f عند 0. فسر النتيجة هندسيا

2. عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا

08 ★ أدرس استمرارية الدالة عند 0 في كل حالة من الحالات

التالية:

$$1. \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & : x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & : x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

09 ★ بين أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} & : x > 0 \\ f(x) = \frac{1-x^2}{x-2} & : x \leq 0 \end{cases}$$

مستمرة على $\mathbb{R}$

10 ★ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & : x < 1 \\ a & : x = 1 \\ x^2 + b & : x > 1 \end{cases}$$

عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 1.

11 ★ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - a & : x < 2 \\ f(x) = \frac{2x^2 - a + b}{x} & : x \geq 2 \end{cases}$$

حيث a و b عدنان حقيقيان.

عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2.

12 نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي:

$$g(x) = \frac{2}{x} \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

وليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين

بين أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة A فاصلتها x_0 حيث

$$1 < x_0 < 2$$

13 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 3$$

1. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2. شكل جدول تغيرات الدالة f

3. اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1; +\infty[$

4. تحقق أن $2 < \alpha < 3$ ثم عين حصرا لـ α سعته 0,1

14 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1; 3]$ بـ:

$$f(x) = x - x E(x)$$

حيث E هي الدالة الجزء الصحيح

1. أكتب عبارة $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى كل مجال من المجالات

التالية $[-1; 0]$ ، $[0; 1]$ ، $[1; 2]$ و $[2; 3]$

2. في معلم، أنشئ التمثيل البياني للدالة f .

3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1; 3]$ ؟

15 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$	-7	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
f	-10	3	$+\infty$	6

1. عين في كل حالة من الحالات التالية عدد حلول المعادلة المقترحة

$$(أ) \quad f(x) = 0 \quad (ب) \quad f(x) = -7 \quad (ج) \quad f(x) = 6$$

2. حل المتراجحة $f(x) \geq 5$

16 ★ f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ بحيث

$$f(b) > b^2 \quad \text{و} \quad f(a) < ab$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a; b]$ بحيث $f(c) = bc$

(إرشادات :

طبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة $(x \mapsto f(x) - bx)$

17 ★ f دالة مستمرة على المجال $[0; 1]$ بحيث $f(0) = 0$ و

$f(1) = 1$. بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0; 1[$ بحيث

$$f(c) = \frac{1-c}{1+c}$$

(إرشادات :

طبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة $(x \mapsto f(x) - \frac{1-x}{1+x})$

من البكالوريا...

يشمل ★★★★★

⌚ 25 دقيقة

- نهايات دوال صماء
- النهاية بالحصر
- النهاية بالمقارنة

18 1, f هي دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

(أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ ،

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

هل للدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟2. h هي الدالة المعرفة من أجل $x > 1$ بـ :

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$$

(أ) بين أنه لما يكون $x > 1$ يكون

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

(ب) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > \sqrt{2x}$ ثم عيّن19 لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = f(x) - xf(x) + 1$$

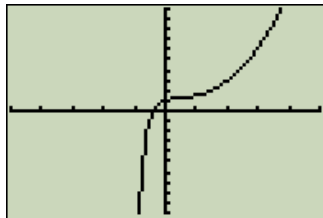
 f هي الدالة الموجبة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و التي تحقق $f(x) = f'(x)$ ، $f(0) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 1. عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$ 2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيرات الدالة g 3. أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$ 4. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

5. أثبت المساواة :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

20 لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R} - \{-1\}$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

و ليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني.برسم تمثيلها البياني على آلة حاسبة بيانية، يُعتقد أن المنحني $\mathcal{C}_f$ يقبل مماسا يوازي محور الفواصل

يشمل ★★★★★

⌚ 30 دقيقة

- تعيين عبارة دالة
- مبرهنة القيم المتوسطة
- المماسات لمنحن الموازية لمحور الفواصل
- تشكيل جدول تغيرات

1. (أ) عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c و d التي تحقق :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$$

(ب) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها و فسر النتائج هندسيا

2. (أ) أثبت أنه يُمكن كتابة $f'(x)$ على الشكل $\frac{N(x)}{D(x)}$ حيث $N(x)$ هو كثير حدود من الدرجة الثالثة

(ب) أثبت وجود عدد حقيقي α وحيد حيث $N(\alpha) = 0$

(ج) ماذا نستنتج بالنسبة إلى المماسات للمنحني C_f الموازية لمحور الفواصل

(د) استنتج حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

21 a, b, c و d هي أعداد حقيقية حيث من أجل كل $x \neq -1$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$$

في الشكل المقابل يُعطى جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	-2	$+\infty$	0	$+\infty$	

1. (أ) ما هي قيمة d ؟

(ب) أحسب $f'(x)$

(ج) عيّن الأعداد a, b, c و

2. المستوي منسوب إلى معلم،

أثبت أن المنحني C الممثل للدالة f يقبل المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$ و

عند $-\infty$. أدرس وضعية C بالنسبة إلى Δ

22 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الرسم: 1 cm)

نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

و ليكن C تمثيلها البياني

1. (أ) عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$

(ب) أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

2. (أ) أثبت أن $[u(x) + 2x]$ يؤول إلى 0 لما يؤول x إلى $-\infty$

(ب) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا $u(x) > 0$. استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$

(ج) فسر هذه النتائج بيانيا

3. نقبل أن الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أنشئ المنحني C و مستقيمه المقارب المائل

4. C' هو التمثيل البياني للدالة v المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$v(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - x$$

و $\mathcal{H}$ هو اتحاد C و C'

تحقق أن للمنحني $\mathcal{H}$ المعادلة: $y^2 + 2xy - 1 = 0$

يشمل ★★★★★

⌚ 30 دقيقة

- تفسير جدول تغيرات
- تعيين عبارة دالة
- وضعية منحنى بالنسبة إلى مستقيمه المقارب

يشمل ★★★★★

⌚ 30 دقيقة

- إزالة حالات عدم التعيين
- وضعية منحنى بالنسبة إلى مستقيمه المقارب
- معادلة اتحاد منحنين