الاسم و اللقب :

الأستاذ

محمد سراي

BAC 2017

الاستمرارية-الاشتقاقية-دراسة الدوال

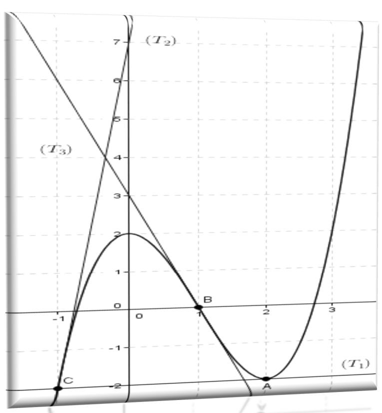
1) استمرارية دالة عند قيمة و على مجال

2) مبرهنة القيّم المتوسطة و تطبيقاتها

3) قابلية اشتقاق دالة في قيمة و على مجال- معادلة المماس للمنحنى في نقطة منه.

4) الدالة المشتقة لمركب دالتين

5) تمارين محلولة - تمارين للحل



الاستمرارية:

تعريف: f دالة عددية معرّفة على مجموعة D من $\mathbb{R}$. a عدد حقيقي غير معزول من D.

الدالة f مستمرة عند a معناه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

مثال 1: الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x^3+2x-3$، مستمرة عند القيمة 0 لأنّ: من جهة $f(0)=-3$ و من جهة أخرى: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-3$

مثال 2: الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

إذا كان $x<0$ فإنّ $f(x)=\dfrac{x^2-6}{x-3}$ و إذا كان $x\geq 0$ فإنّ $f(x)=x+5$، ليست مستمرة عند القيمة 0 لأنّ:

من جهة: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x+5)=5$ و من جهة أخرى $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{x^2-6}{x-3}=2$

نتائج من التعريف:

- ✓ تكون دالة f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من قيّم هذا المجال.
- ✓ إذا كانت دالة f مستمرة على مجال I، فإنّ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم هو خط متصل.
- ✓ الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها.
- ✓ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- ✓ الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها.
- ✓ الدالتان: $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sin x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.
- ✓ مجموع، جداء و تركيب دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

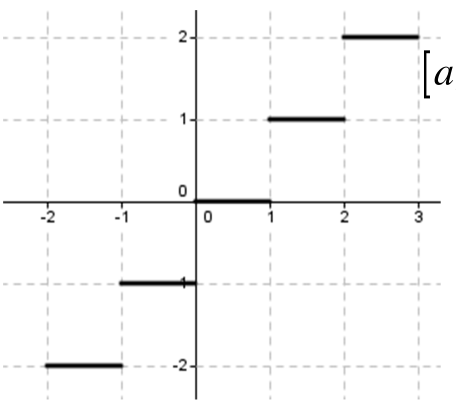
دالة الجزء الصحيح

تعريف: دالة الجزء الصحيح هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي x، العدد الصحيح n الذي يحقق:
$n\leq x<n+1$ و نرمز لها بالرمز: E أو $[\ ]$ أو int و نكتب: $E(x)=[x]=Int(x)=n$

أمثلة: $E(0,25)=0\ ;\ [3,56]=3\ ;\ Int(-1,25)=-2\ ;\ E(-0,23)=-1$

إذا كان $x\in[0;1[$ فإنّ $E(x)=0$ ، إذا كان $x\in[-1;0[$ فإنّ $E(x)=-1$

ملاحظة : a عدد صحيح. دالة الجزء الصحيح ثابتة على كل مجال من الشكل $[a,a+1[$

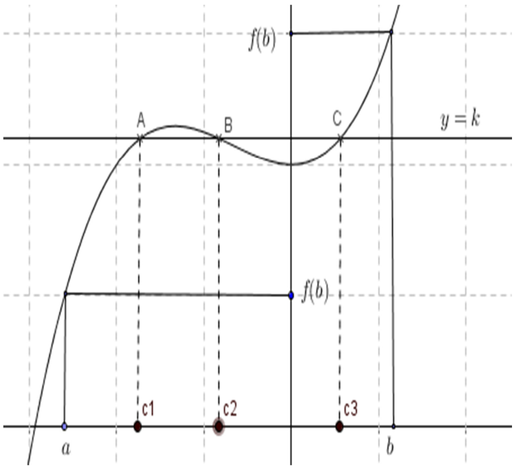


التمثيل البياني لدالة الجزء الصحيح

المستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الشكل يوضح المنحنى البياني لدالة الجزء الصحيح على المجال $[-2;3[$

ملاحظة: دالة الجزء الصحيح ليست مستمرة عند كل عدد صحيح.



مبرهنة القيّم المتوسطة

مبرهنة: f دالة معرّفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f\left(a\right)$ و $f\left(b\right)$؛يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$يحقق: $f(c)=k$

بمعنى آخر: المعادلة $f\left(x\right)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$

التفسير البياني: f دالة معرّفة و مستمرة على مجال $[a,b]$، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$؛ (d) المستقيم ذو المعادلة $y=k$.من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f\left(a\right)$ و $f\left(b\right)$، (d)يقطع (C)على الأقل في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.(لاحظ الشكل).

ملاحظة 1: إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a,b]$،فإنّ حل المعادلة $f\left(x\right)=k$ على $[a,b]$ وحيد.

ملاحظة 2 :

كل معادلة من الشكل: $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ هي معادلة مكافئة للمعادلة $h\left(x\right)=0$ حيث: $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$

تمرين 1 محلول:

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f\left(x\right)=x^3+3x^2+3x-1$

1)أنجز جدول تغيرات الدالة f .

2) بيّن أنّ المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.تأكد أنّ $\alpha\in\left]0;0,5\right[$.

حل:

جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	‖ -2 ↗	$+\infty$

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ و لدينا: $f(x)\in\left]-2;+\infty\right[$ و بما أنّ $0\in\left]-2;+\infty\right[$ و f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$، فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

التأكد أنّ $\alpha\in\left]0;0,5\right[$: لدينا: $f(0)=-1$ ، $f(0,5)=\dfrac{11}{8}$ إذن $f(0,5).f(0)<0$ و بالتالي: $\alpha\in\left]0;0,5\right[$

تمرين 2 محلول:

f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $]2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{5}{x-2}$; $f(x)=\sqrt{x}$

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

بيّن أنّ (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث: $4<x_0<5$

حل:

تبيين أنّ (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث: $4 < x_0 < 5$

نبيّن أنّ المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[4;5]$.

المعادلة $f(x) = g(x)$ مكافئة للمعادلة $f(x) - g(x) = 0$.

نضع : $h(x) = f(x) - g(x)$ ، أي: $h(x) = \sqrt{x} - \dfrac{5}{x-2}$

الدالة h مستمرة على المجال $[4;5]$ كمجموع دالتين مستمرتين.

حساب $h(4)$ و $h(5)$:

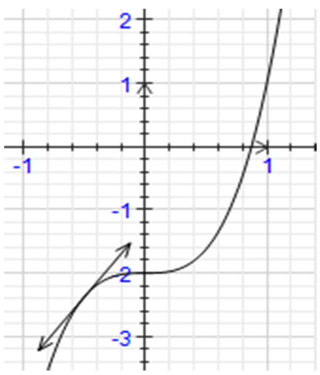
$h(4) = -\dfrac{1}{2}$ ، $h(5) = \sqrt{5} - \dfrac{5}{3} > 0$ لدينا, إذن $h(4).h(5) < 0$

الدالة h متزايدة تماما على المجال $[4;5]$ لأنّ : $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{5}{(x-2)^2}$ أي $h'(x) > 0$ على $[4;5]$.

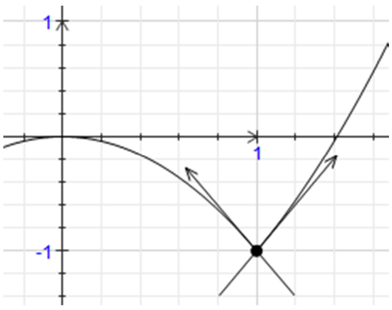
نتيجة:

المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[4;5]$ و بالتالي (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث: $4 < x_0 < 5$.

الاشتـقـاقـيـة

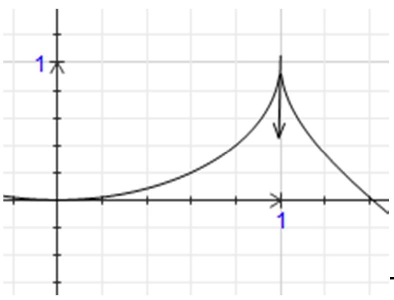


تعريف: f دالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a عنصر من I. (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس. الدالة f قابلة للاشتقاق في القيمة a معناه للنسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية حقيقية عندما يؤول x إلى a ، نرمز لهذه النّهاية بالرمز $f'(a)$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$



تعريف مكافئ: f قابلة للاشتقاق في القيمة a معناه : للنسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية منتهية عندما يؤول h إلى 0 و نكتب: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

مبرهنة: كل دالة قابلة للاشتقاق في قيمة حقيقية a مستمرة عند a و العكس غير صحيح.



التفسير البياني للعدد المشتق: المنحنى (C) يقبل مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ معادلة له:

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

ملاحظة 1 : إذا كانت للنسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايتين منتهيتين مختلفتين l_1 و l_2 عندما يؤول x إلى a ، فإنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق في القيمة a.

التفسير البياني : المنحنى (C) يقبل في النقطة $S(a,f(a))$ مماسين معامل توجيه كل واحد منهما l_1 و l_2
النقطة S تسمى نقطة زاوية.

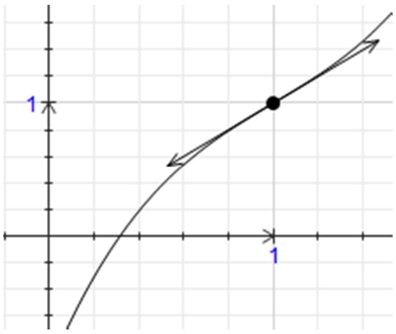
إذا كانت : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ ،فإنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق في القيمة a

التفسير البياني : المنحنى البياني للدالة f يقبل في النقطة $S(a,f(a))$مماسا مواز لحامل محور التراتيب.

نقطة الانعطاف:

تعريف: نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني.

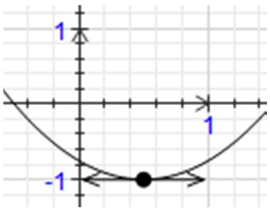
مبرهنة: a عدد حقيقي. f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل a، f'' دالتها المشتقة الثانية على المجال I



،إذا كان $f''(a)=0$ وغيّر $f''(x)$ إشارته بجوار العدد a،على المجال I ؛
فإنّ النقطة $S(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

القيمة الحدّية المحلية لدالة على مجال :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. a عدد حقيقي من I. k عدد حقيقي.
(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس. الدالة f تقبل
القيمة k قيمة حدّية محلية على المجال I، من أجل القيمة a للمتغير x إذا و فقط إذا تحقق:



1) $f(a)=k$

2) $f'(a)=0$

3) $f'(x)$ يغيّر إشارته بجوار a .

التفسير البياني: في النقطة ذات الفاصلة a ، المماس للمنحنى مواز لحامل محور الفواصل.

عمليات على المشتقات: f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. الدالة g لا تنعدم على I.

الدالة	$f+g$	$f\times g$	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$	$x\mapsto\sqrt{ax+b}$
الدالة المشتقة	$f'+g'$	$f'\times g+g'\times f$	$\frac{-g'}{g^2}$	$\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$	$x\mapsto\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

الدالة المشتقة لمركب دالتين:

إذا قبلت دالة f الاشتقاق على مجال I ، وقبلت دالة g الاشتقاق على المجال $f(I)$ ، فإنّ الدالة gOf تقبل
الاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $(gOf)'(x)=f'(x).g'[f(x)]$.

مثال: f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=(x^2-4x+1)^2$

احسب باستعمال مركب دالتين $f'(x)$.

حل: نضع: $u(x)=(x^2-4x+1)$ و بالتالي $u'(x)=2x-4$

$v(x)=x^2$ و بالتالي: $v'(x)=2x$. لدينا: $f(x)=(vOu)(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=u'(x)v'(u(x))$ أي: $f'(x)=(2x-4)[2u(x)]$

و بالتالي: $f'(x)=2(2x-4)(x^2-4x+1)$

نتائج:

نتيجة 1: f دالة معرّفة ،موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I .الدالة g المعرّفة بالعبارة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I و لدينا: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

نتيجة 2: nعدد صحيح. f دالة معرّفة و قابلة للاشتقاق على مجال I .الدالة g المعرّفة بالعبارة:

$g(x)=[f(x)]^n$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $g'(x)=nf'(x)[f(x)]^{n-1}$

مثال: f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$. احسب $f'(x)$ حيث: $f(x)=(x^2-3x+2)^4$

نضع: $u(x)=x^2-3x+2$ وبالتالي: $u'(x)=2x-3$ و لدينا: $f(x)=[u(x)]^4$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=4u'(x)[u(x)]^3$ أي $f'(x)=4(2x-3)(x^2-3x+2)^3$

اتجاه تغير دالة و إشارة المشتق: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

$x\in I : f'(x)\geq 0$	$x\in I : f'(x)\leq 0$	$x\in I : f'(x)=0$
f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I	f ثابتة على I

ترميز: f دالة عددية، متغيّرها x ،إذا قبلت f الاشتقاق على مجال I نكتب: $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ و إذا كانت f'' هي الدالة المشتقة الثانية لـ f ،نكتب: $f''(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ ،و إذا كانت $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n نكتب:

$f^{(n)}(x)=\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.

تذكير :

مر كز التناظر:

طريقة 1:

$A(a,b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x\in I$ فإنّ $(2a-x)\in I$

ب) $f(2a-x)+f(x)=2b$

طريقة 2:

$A(a,b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x\in I$ فإنّ $(a-x)\in I$ و $(a+x)\in I$

ب) $f(a-x)+f(a+x)=2b$

محور التناظر:

طريقة 1:

يكون مستقيم معادلة له: $x=k$ محور تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x\in I$ فإنّ $(2k-x)\in I$

ب) $f(2k-x)=f(x)$

طريقة 2:

يكون مستقيم معادلة له: $x=k$ محور تناظر لمنحنى دالة f معرّفة على مجموعة I إذا تحقق الشرطان:

أ) من أجل $x\in I$ فإنّ $(k-x)\in I$ و $(k+x)\in I$

ب) $f(k-x)=f(k+x)$

مثال 1: f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم

بيّن أنّ النقطة $A(1;2)$ مركز التناظر للمنحنى (C).

مثال 2: f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم

بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $x=2$ محور التناظر للمنحنى (C).

مثال 3: f الدالة العددية المعرفة على D_f حيث: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$، (C)

تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم

بيّن أنّ: $f(-3-x)=f(x)$، ثمّ فسّر هذه النتيجة بيانيا.

الدالة الدورية:

T عدد حقيقي. f دالة عددية معرّفة على مجموعة D .

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

تكون الدالة f دورية و دورها T ، إذا و فقط إذا تحقق:

أ) إذا كان $x\in D$ فإنّ $(x+T)\in D$

ب) $f(x+T)=f(x)$

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f دورية و دورها T ، يكفي دراستها على مجال طوله T ، و يستنتج تمثيلها البياني على المجموعة D بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$ حيث: $\vec{v}=T\vec{i}$

دراسة مثال:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\cos^2(x)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب : $f(x+\pi)$.ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟ فسّر النتيجة بيانيا.

2) احسب $f(-x)$ ، و فسّر النتيجة بيانيا.

3) باستعمال مركب دالتين ،احسب $f'(x)$ و حدّد إشارتها على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

4) أنجز جدول تغيرات الدالة f ، ثمّ أنشئ المنحنى (C_f).

حل:

1) $f(x+\pi)=cos^2(x+\pi)=cos(x+\pi).cos(x+\pi)=(-cos(x))(-cos(x))=cos^2(x)=f(x)$

الدالة f دو رية و أصغر دور لها هو $T=\pi$ يكفي دراستها على مجال طوله π ،مثلا المجال $[0,\pi]$.

يستنتج تمثيلها البياني على $\mathbb{R}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}=\pi\vec{i}$

2) $f(-x)=cos^2(-x)=cos(-x)cos(-x)=cos(x)cos(x)=cos^2(x)=f(x)$

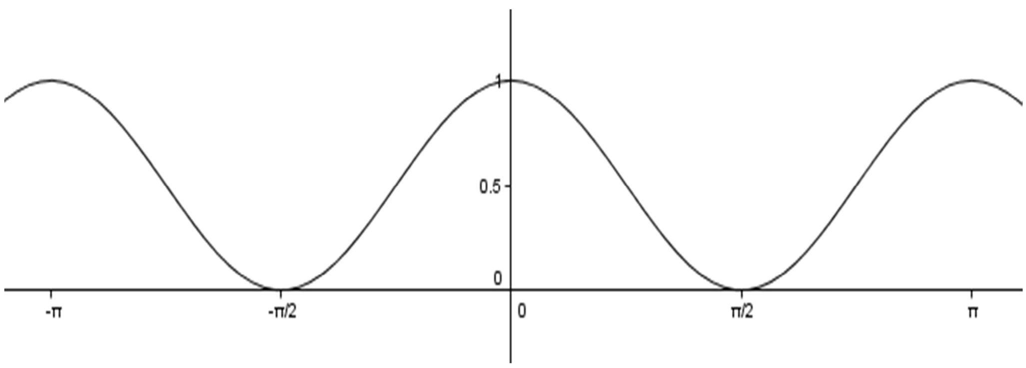
الدالة f زوجية ، تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب، يكفي دراستها على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) نضع: $v(x)=cos(x)$; $u(x)=x^2$ و بالتالي : $f(x)=(uOv)(x)$

$f'(x)=-2\,sin(x).cos(x)$.و يكون من أجل $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x)\le 0$ (لأنّ: $cos\,x\ge 0$ و $sin\,x\ge 0$)

جدول التغيرات و الإنشاء:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0



تمارين:

الاستمرارية عند قيمة –الاستمرارية على مجال

تمرين 1

ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة a في كل حالة من الحالات الآتية:

(أ) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=1$: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-1} \ldots x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$

(ب) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=0$: $\begin{cases} f(x)=5x^2+3x-4 \ \ldots x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-4}{x^2+1} \ \ldots x<0 \end{cases}$

(ج) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=1$: $\begin{cases} f(x)=x^2+E(x) \ \ldots x<1 \\ f(x)=xE(x)+1 \ \ldots x\geq 1 \end{cases}$

(د) الدالة f معرّفة على المجال I : $I=[-7;+\infty[$ و $a=2$: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \ \ldots x\in I \ ; \ x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

تمرين 2 :عيّن قيمة m حتى تكون الدالة f مستمرة عند القيمة a في الحالتين:

(أ) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=0$: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{2x} \ \ldots x\neq 0 \\ f(0)=m \end{cases}$

(ب) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ و $a=-1$: $\begin{cases} f(x)=x^3-3x^2+x+1 \ \ldots x\geq -1 \\ f(x)=-3x+3m \ \ldots x<-1 \end{cases}$

تمرين 3 :ادرس استمرارية الدالة f على مجالات مجموعة تعريفها في كل حالة من الحالات الآتية:

(أ)الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=(x^2+1)\cos x$

(ب) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x)=x^2+1 \ \ldots x>2 \\ f(x)=-x+4x \ \ldots x\leq 2 \end{cases}$

(ج) الدالة f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$: $\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x} \ \ldots x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(د) الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=|x^2-1|$

مبرهنة القيّم المتوسطة وتطبيقها

تمرين 1 :

1) بيّن أنّ المعادلة: $-x^3+3x^2=3$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1;1,5[$.

2) بيّن أنّ المعادلة: $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;\pi[$.

3) بيّن أنّ المعادلة: $-x^3=\sqrt{x+1}$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right[$

تمرين 2 : f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

2) من أجل كل عدد حقيقي x ؛ احسب $f'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ،ثمّ عيّن حصرا سعته $0,5$ للعدد α.

5) عيّن من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة $f(x)$.

الاشتقاقية في قيمة–الاشتقاقية على مجال:

تمرين 1 : أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في القيمة a في الحالات الآتية ثمّ فسّر كل نتيجة هندسيا:

1) f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=x\sqrt{x}$ ؛ $a=0$

2) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1]$ بالعبارة : $f(x)=\sqrt{1-x}$ ؛ $a=1$

3) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=3x+\left|x^2-4\right|$ ؛ $a=-2$ ، $a=2$

تمرين 2 : f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

إذا كان : $x\geq 2$ فإن : $f(x)=(x-2)\sqrt{x-2}$

و إذا كان $x<2$ فإنّ: $f(x)=x^2+kx+2$

(C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عيّن قيمة العدد الحقيقي k حتي تكون الدالة f مستمرة عند 2 .

2) من أجل قيمة k المحصل عليها في السؤال السابق، ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في القيمة 2 ، فسّر النتيجة بيانيا.

تذكير حول التمثيلات البيانية

التمثيلات البيانية:

(P) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f دالة عددية معرّفة على مجموعة D_f من مجموعة الأعداد الحقيقية.(C_f) تمثيلها البياني في المستوي (P).

المنحنى (C_f) معرّف كما يلي: $(C_f)=\{M(a,b)\in(P): a\in D_f \wedge b=f(a)\}$

<u>تقاطع المنحنى مع حامل محور التراتيب:</u>

نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب هي كل نقطة A فاصلتها 0 و ترتيبها $f(0)$.

إذا كان $0\notin D_f$، فإنّ المنحنى (C_f) لا يقطع حامل محور التراتيب.

<u>تقاطع المنحنى مع حامل محور الفواصل:</u> نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هي كل نقطة A ترتيبها 0 و فاصلتها x_0 تحقق المعادلة $f(x)=0$

<u>التمثيلات البيانية للدوال من الشكل</u> $f+k$: للدالتين f و $(f+k)$ نفس اتجاه التغير على مجال I من $\mathbb{R}$.

التمثيل البياني (C_{f+k}) للدالة $(f+k)$ يستنتج انطلاقا من المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}=k\vec{j}$

<u>التمثيل البياني للدوال من الشكل:</u> $x\mapsto g(x)=f(x+b)+k$

التمثيل البياني (C_g) للدالة g يستنتج انطلاقا من المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}=-b\vec{i}+k\vec{j}$.

الدالة	المنحنى البياني
الدالة الزوجية	تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب
الدالة الفردية	تمثيلها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ O.
الدالة g المعرّفة بـ: $g(x)=-f(x)$	تمثيلها البياني نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل.
الدالة g معرّفة بـ: $g(x)=\|f(x)\|$ في هذه الحالة نكتب $g(x)$ على الشكل: $g(x)=f(x)$ ... $f(x)\geq 0$ $g(x)=-f(x)$ ... $f(x)\leq 0$	إذا كان $f(x)\geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f) إذا كان $f(x)\leq 0$ يكون (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.
الدالة g معرّفة بـ: $g(x)=f(\|x\|)$ الدالة g زوجية فمن أجل $x\geq 0$ لدينا $g(x)=f(x)$	(C_g) منطبق على (C_f) إذا كان $x\geq 0$ ثمّ نكمل الإنشاء بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-x^3+3x+1$،

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(0;1)$.

2) ادرس حسب قيّم العدد الحقيقي x، إشارة : $f(x)-3x-1$. فسّر النتيجة بيانيا

3) برهن بطريقة ثانية أنّ النقطة A هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

حل:

1)معادلة المماس: $y = 3x + 1$

2)إشارة : $f(x) - 3x - 1$: $f(x) - 3x - 1 = -x^3$ ومنه:

$[f(x) - 3x - 1] > 0$ إذا كان $x < 0$ و $[f(x) - 3x - 1] < 0$ إذا كان $x > 0$.

المماس (T) يخترق المنحنى (C_f).النقطة $A(0;1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

3) $f''(x) = -6x$ ، $f''(x) = 0$ معناه $x = 0$ ، $f''(x)$ يغير إشارته بجوار 0. و منه النقطة A نقطة انعطاف.

التمرين الثاني: a و b عددان حقيقيان.

f الدالة المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـِ : $f(x) = ax + \frac{b}{4x+2}$ ، (C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) برّر أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f .

ب) عين العددين a و b بحيث من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(0) = \frac{7}{2}$ و $f(0) = -\frac{3}{2}$.

2) أ) أحسب النهايات عند الحدود المفتوحة من المجموعة D_f.

ب) برّر أنه من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(x) > 0$.

جـ) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) برهن أن المستقيم ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C).

ب) أكتب معادلة لمماس المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ) برهن أنّ النقطة $w\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ مركز التناظر للمنحني (C)

د) أنشئ المنحني (C) .

حل:

1)أ) الدالة f دالة ناطقة فهي تقبل الاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها.

ب) تعيين العددين a و b: لدينا أوّلا: $f'(x) = a - \frac{4b}{(4x+2)^2}$

$f(0) = -\frac{3}{2}$ معناه $\frac{b}{2} = \frac{-3}{2}$ و منه $\boxed{b = -3}$

$f'(0) = \frac{7}{2}$ معناه $a - b = \frac{7}{2}$ و منه $a = \frac{1}{2}$

عبارة الدالة f هي إذن: $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4x+2}$

1) أ) حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} f(x) = +\infty ; \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$$

ب) التبرير أنّ $f'(x) > 0$:لدينا: $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{12}{(4x+2)^2}$ و

بالتالي $f'(x) > 0$

ج) إنجاز جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

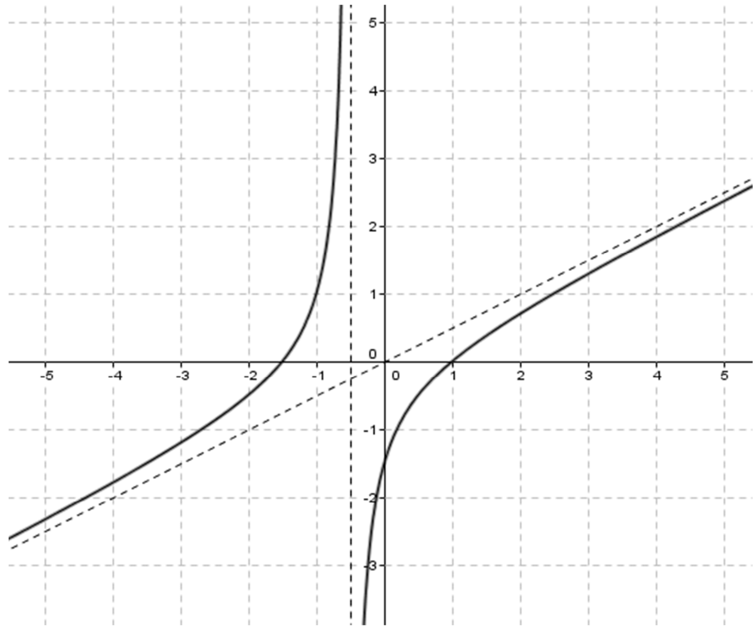
2) أ) إثبات أنّ المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب للمنحنى (C):

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \to -\infty} - \frac{3}{4x+2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \to +\infty} - \frac{3}{4x+2} = 0$$

ب) معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0: $y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$

ج) إثبات أنّ النقطة $w\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C): نبيّن أنّ $f(-1-x) + f(x) = -\frac{1}{2}$

د) الإنشاء:



التمرين الثالث:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي: $\begin{cases} f(x) = -3 + \sqrt{x^2+1} \ ; \ x < 0 \\ f(x) = -2 + \dfrac{x^3}{x^2+1} \ ; \ x \geq 0 \end{cases}$ و (C_f) منحناها البياني في مستو منسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) أدرس استمرارية الدالة f عند x_0 حيث: $x_0 = 0$ ، ثم أدرس استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) أدرس اشتقاقيه الدالة f في القيمة x_0 حيث: $x_0=0$. فسر النتيجة بيانيا .

2) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x+2\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x+3\right]$ ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا .

3) أ) حل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة: $f(x)=0$.

ب) برهن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ ثمّ تأكد أنّ: $\alpha\in[2,3;2,4]$.

ج) تحقق أنّ: $\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{\alpha-2}}$.

4) أنشئ (C_f) و مستقيماته المقاربة.

$\boxed{\text{حل:}}$

1) أ) دراسة استمرارية الدالة f عند x_0 حيث: $x_0=0$:

f مستمرة عند 0 معناه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

من جهة: $f(0)=-2+\dfrac{0^3}{0^2+1}=-2$ من جهة أخرى:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}(-3+\sqrt{x^2+1})=-2$ ؛ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(-2+\dfrac{x^3}{x^2+1})=-2$

الدالة f مستمرة عند 0 ومستمرة على المجال $]-\infty;0]$ كمركب دالتين مستمرتين و مستمرة على المجال $[0;+\infty[$ لأنها دالة ناطقة. و بالتالي الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

ب) دراسة قابلية اشتقاق f في 0 :

لدينا من جهة:

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-3+\sqrt{x^2+1}+2}{x}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x}$$

و من جهة أخرى

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0} x=0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-2+\frac{x^3}{x^2+1}+2}{x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x^3}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x^2}{(x^2+1)} = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 و $f'(0)=0$. المنحنى البياني (C_f)يقبل مماسا في النقطة $S(0;-2)$ مواز لحامل محور الفواصل معادلة له: $y=-2$.

2)أ)حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3+\sqrt{x^2+1}) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2+\frac{x^3}{x^2+1}) = +\infty$.

اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

من أجل $x<0$: $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و بالتالي : $f'(x)<0$. الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

من أجل $x\geq 0$: $f'(x)=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ و بالتالي : $f'(x)\geq 0$. الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

ج)حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x+2]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x+3]$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x+2] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2+\frac{x^3}{x^2+1}-x+2\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{x^2+1}\right]=0$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x+3] = \lim_{x\to-\infty}\left[-3+\sqrt{x^2+1}+x+3\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right]=0$$

التفسير البياني:

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلة له $y=x-2$ بجوار $(+\infty)$.

المنحنى (C_f)يقبل مستقيما مقاربا معادلة له $y=-x-3$ بجوار $(-\infty)$.

3)أ) حل المعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-\infty;0[$:

في المجال $]-\infty;0[$: $f(x)=0$ معناه $\left(-3+\sqrt{x^2+1}\right)=0$

معناه $\left(\sqrt{x^2+1}\right)=3$

معناه $x^2=8$

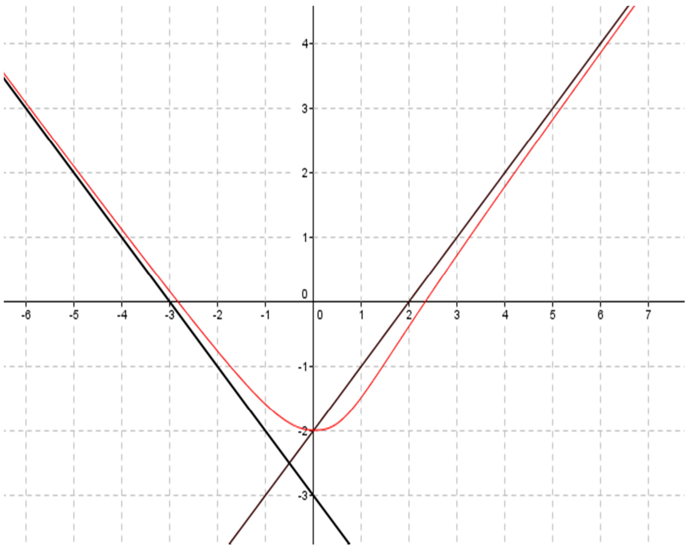
معناه $x=-2\sqrt{2}$

ب) البرهان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0;+\infty[$ ثمّ تأكد أنّ: $\alpha\in[2,3;2,4]$:

الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$ و من جدول التغيرات نلاحظ أنّه إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإنّ $f(x)\in[-2;+\infty[$ و بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0;+\infty[$.

التأكد أنّ $\alpha\in[2,3;2,4]$:

لدينا: $f(2,3)=...$ و $f(2,4)=...$، بما أنّ $f(2,3).f(2,4)<0$ فإنّ $\alpha\in[2,3;2,4]$.



العدد α يحقق: $f(\alpha)=0$ و بالتالي:

$-2+\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2+1}=0$ معناه $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2+1}=2$

معناه $\alpha^3=2\alpha^2+2$

معناه $\alpha^3-2\alpha^2=2$

معناه $\alpha^2(\alpha-2)=2$

معناه $\alpha^2=\dfrac{2}{\alpha-2}$

و بما أنّ $\alpha>0$ فإنّ : $\boxed{\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{\alpha-2}}}$

التمرين الرابع:

I) n عدد طبيعي غير معدوم. g_n الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_n(x)=\dfrac{1}{n}x^3+3x-2$

1) احسب نهايات الدالة g_n عند حدود مجال تعريفها.

2) احسب $g_n{}'(x)$ و حدّد إشارتها على $\mathbb{R}$. أنجز جدول تغيرات الدالة g_n. ($g_n{}'$ هي الدالة المشتقة للدالة g_n)

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$ ثمّ تحقق أنّ: $\alpha_n\in]0;1[$

ب) من أجل كل عدد حقيقي x ، حدّد إشارة $g_n(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1}$، (C) منحناها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{2xg_1(x)}{(x^2+1)^2}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجال تعريفها، ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=2x+\dfrac{2-2x}{x^2+1}$.

ب) استنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) يطلب تعيين معادلة له. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (d).

4) بيّن أنّ : $f(\alpha_1)=3\alpha_1$.

5) احسب $f(-1)$ و بأخذ $\alpha_1=0{,}6$ ، أنشئ بعناية المستقيم (d) و المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي حيث: $m\in]1;2[$. باستعمال المنحنى (C)،ناقش حسب قيّم m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$2mx^3-x^2-(1-2m)=0$$

حل:

أوّلا: $g_n(x)=\dfrac{1}{n}x^3+3x-2$.

1) حساب النّهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{n}x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n}x^3=+\infty$

2) الدالة g_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $g_n'(x)=\dfrac{3}{n}x^2+3$.من أجل $x\in\mathbb{R}$: $g_n'(x)>0$.

جدول تغيرات الدالة g_n :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g_n'(x)$	$+$
$g_n(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ)الدالة g_n مستمرة على $\mathbb{R}$.إذا كان $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $g_n(x)\in\mathbb{R}$ و بما أنّ $0\in\mathbb{R}$

و الدالة g_n متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.

التأكد: لدينا $g_n(0)=-2$ ، $g_n(1)=\dfrac{1}{n}+1$ إذن $g_n(0)<0$ و $g_n(1)>0$

و بالتالي: $\alpha_n\in]0;1[$.

ب) إشارة $g_n(x)$ على $\mathbb{R}$ مبيّنة في الجدول:

x	$-\infty$	α_n	$+\infty$
$g_n(x)$	$-$	0	$+$

ثانيا: $f(x)=\dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1}$

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f'(x)=2\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3+1)}{(x^2+1)^2}$ ، $f'(x)=2x\dfrac{3x(x^2+1)-2(x^3+1)}{(x^2+1)^2}$ ،

$f'(x)=2x\dfrac{x^3+3x-2}{(x^2+1)^2}$ و بالتالي: $f'(x)=2x\dfrac{g_1(x)}{(x^2+1)^2}$

إنّ إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ من إشارة x و $g_1(x)$ المبيّنة في الجدول:

x	$-\infty$		0		α_1		$+\infty$
$g_1(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

جدول التغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(\alpha_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

3)أ) واضح أنّ:

$f(x)=2x+\dfrac{2-2x}{x^2+1}$.

ب) لدينا $f(x)-2x=\dfrac{2-2x}{x^2+1}$

إذن،

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=0$ و بالتالي المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب للمنحنى (C).

تحديد وضعية (C) بالنسبة إلى (d) :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-2x$		$+$	0	$-$	

من أجل $x<1$ المنحنى (C) فوق المستقيم (d).

من أجل $x>1$ المنحنى (C) تحت المستقيم (d).

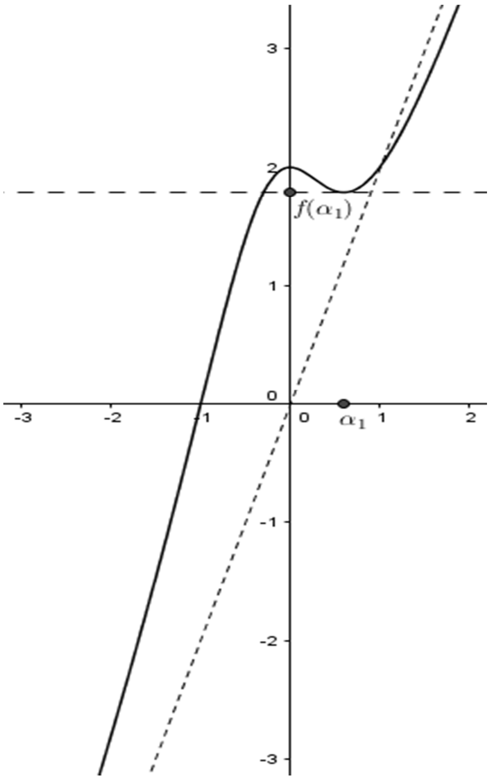
المنحنى (C) و المستقيم (d) يتقاطعان في النقطة $A(1;2)$

4) إثبات أنّ $f(\alpha_1)=3\alpha_1$ (نقبل طرقا أخرى صحيحة)

α_1 هو حل للمعادلة $g_1(x)=0$ فهو يحقق: $\alpha_1^3+3\alpha_1-2=0$

إذن: من جهة : $\alpha_1^3=2-3\alpha_1$ و $\alpha_1^2=\dfrac{2}{\alpha_1}-3$

و من جهة أخرى: $f\left(\alpha_1\right)=\dfrac{2\left(\alpha_1^{\ 3}+1\right)}{\alpha_1^{\ 2}+1}$ و بالتالي: $f\left(\alpha_1\right)=\dfrac{2\left(3-3\alpha_1\right)}{\dfrac{2-2\alpha_1}{\alpha_1}}$ و منه $f\left(\alpha_1\right)=3\alpha_1$



5) الإنشاء: $f\left(-1\right)=0$

المنحنى (C)يقطع حامل محور التراتيب في النقطة $K\left(0;2\right)$ و يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $L\left(-1;0\right)$

6) المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة:

$2mx^3-x^2-\left(1-2m\right)=0$.

المعادلة تكافئ$2mx^3+2m=x^2+1$ ، و بالتالي:

$2m\left(x^3+1\right)=x^2+1$.أي: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{m}$

المناقشة:

قيّم m	قيّم $\dfrac{1}{m}$	عدد و إشارة الحلول
$m\in\left]1;2\right[$	$\dfrac{1}{m}\in\left]\dfrac{1}{2};1\right[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

تمارين :دراسة الدوال

التمرين الأول

f الدالة العددية المعرفة على D_f حيث: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;-1\}$:ب $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$

(C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ،b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f\left(x\right)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$

2) أ) احسب نهايات الالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب) استنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

ج) (d) المستقيم ذو المعادلة $y=3$.ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (d).

3) احسب $f'(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من D_f: $f\left(-3-x\right)=f\left(x\right)$.ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة للمنحنى (C)؟

ب) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل و محور التراتيب.

ج) أنشئ المنحني (C) ومستقيماته المقاربة.

5) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $u_n = 3 - f(n)$

أ) احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_2$.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to\infty}(n.S_n)$.

التمرين الثاني

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

2) أ) بيّن أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنّ: $f'(x) = \dfrac{-6x(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3}$.

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f .استنتج حصرا لـ $f(x)$.

3) أ) بيّن أنّ النقطة $w\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ مركز التناظر للمنحنى (C).

ب) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة w.

4) أ) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C) مع كل من محور الفواصل والتراتيب.

ب) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C).

5) m وسيط حقيقي.

أ) (d_m) مستقيم معادلة له: $y = 2mx + m$. بيّن أنّ (d_m) يشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيتيها.

ب) ناقش بيانيا، حسب قيّم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x الآتية: $f(x) = 2mx + m$.

6) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = \dfrac{|2x+1|}{\left(x^2+x+1\right)^2}$، (C') تمثيلها البياني.

اكتب دون رمز القيمة المطلقة العبارة $g(x)$ ثمّ استنتج إنشاء المنحنى (C') انطلاقا من المنحنى (C).

التمرين الثالث

(I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$

1) أ) احسب نهايتي الدالة g عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) أ) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق: $g(\alpha) = 0$، تأكد أنّ $\alpha \in]0,7;0,8[$.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x ،حدّد إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايتي الدالة f عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$.

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x ، احسب $f'(x)$ ثمّ تأكد أنّ : $f'(x)=\frac{xg(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) برهن أنّ: $f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{3}-\frac{1}{\alpha}$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أ) برهن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1,8;1,9[$.

ب) أنشئ بعناية المنحنى (C).

ج) m وسيط حقيقي. باستعمال المنحنى (C)ناقش حسب قيّم m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x الآتية:

$$x^3=3\left(\sqrt{x^2+1}+m\right)$$

التمرين الرابع:

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=x^3+3x+8$

1) أ) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x ، احسب $g'(x)$ و عيّن إشارتها.

2) أ) أنجز جدول تغيرات الدالة g .

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$, تأكد أنّ $\alpha\in\,]-2;-1[$.

ج) استنتج حسب قيّم العدد الحقيقي x ،إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

1) أ) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$ ،

حيث: a ، b ، c و d أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج) استنتج أنّ المنحنى (C)يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) يطلب تعيين معادلة له.

د) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (d).

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x،احسب $f'(x)$ و تأكد أنّ : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

ب) استنتج دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

ج) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) أنشئ بعناية المنحنى (C) و مستقيمه المقارب.

4) m وسيط حقيقي.

أ) عيّن قيّم m حتى تقبل المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول مختلفة نرمز لها بالرمز x_1، x_2 و x_3 .

ب) بيّن أنّ : $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=0$.

5) h الدالة العددية المعرّفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $h(x)=f\left(\sin x\right)$

عيّن $h'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة h .

التمرين الخامس

f الدالة المعرّفة على D_f بالعبارة. $f(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$. (C)تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حدّد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، قارن بين $f(x+2\pi)$ و $f(x)$ ثمّ بين $f(-x)$ و $f(x)$.

ب) استنتج أنّ يمكن دراسة الدالة f على المجال $]0;\pi]$.

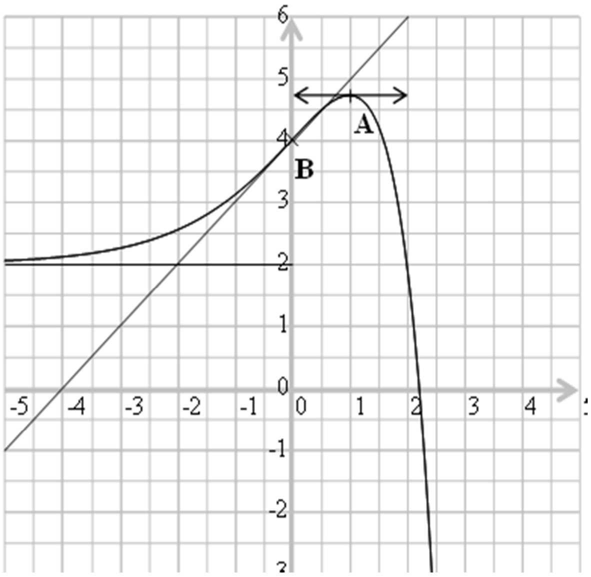
3) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f(x)=2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. استنتج $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

4) احسب $f'(x)$ و عيّن إشارتها ثمّ أنجز جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;\pi]$.

5) أنشئ بدقة المنحنى (C)في المجال $]0;2\pi[$.

التمرين السادس

f دالة عددية معرّفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) للدالة f



نعلم أنّ:

- المستقيم ذو المعادلة: $y=2$ مقارب لـ (C) بجوار $(-\infty)$.
- المماس لـ (C) في النقطة A ذات الفاصلة 1 مواز لمحور الفواصل.
- النقطة $B(0;4)$ نقطة من المنحنى (C).

1) بقراءة بيانية :

أ) ما هي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؟

ب) عيّن $f'(1)$ و $f'(0)$.

ج) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة B .

د) حل بيانيا في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $f'(x)>0$ ،

هـ) α العدد الحقيقي الذي يحقق: $f(\alpha)=0$, عيّن حصرا سعته $0,5$ للعدد α، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) h الدالة العددية المعرّفة على $[-1;5]$ بالعبارة: $h(x)=f(-2x+4)$.

أ) احسب $h'(2)$.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;5]$، احسب $h'(x)$ و حدّد إشارتها.

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $[-1;5]$ بطريقتين مختلفتين.

التمرين السابع

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,7<\alpha<0,8$

ب) استنتج حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّ من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيّم x ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f (نأخذ $f(\alpha)\approx -0{,}1$)

4) احسب $f(1)$ ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5)أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى $\left(C_f\right)$.

6) h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$

$\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) تحقق أنّ من أجل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ $\left(C_h\right)$ هو صورة $\left(C_f\right)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثمّ أنشئ $\left(C_h\right)$

التمرين الثامن: **بكالوريا 2010 تقني رياضي 06 نقطة**

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$، (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) بيّن أنّ الدالة f فردية.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$

ج) ادرس تغيرات الدالة f .

2) أ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (T) ثمّ استنتج أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$،ثمّ استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

ب) أنشئ المستقيمين (d) و (d') ثمّ المنحنى (C).

4) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=|x|\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$، (C') تمثيلها البياني في المستو المنسوب إلى المعلم السابق.

1) بيّن أنّ الدالة g زوجية. 2) أنشئ المنحنى (C') انطلاقا من المنحنى (C).