كيف ؟

نتحقق أنّ ثلاثة نقط تعيّن مستويا ؟

ثلاثة نقط A ، B و C من الفضاء تعيّن مستويا إذا و فقط إذا كانت في غير استقامية

الطريقة 1 : نتحقق أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا (بمعنى مركباتهما غير متناسبة)

الطريقة 2 : نحسب قيسا للزاوية $\widehat{BAC}$ (باستعمال تعريف الجداء السلمّي مثلا) و نتحقق أنّ هذه الزاوية غير معدومة و غير مستقيمة

تذكير : الجداء السلمّي للشعاعين $\overrightarrow{AB}(x;y)$ و $\overrightarrow{AC}(x';y')$ هو العدد الحقيقي :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$$

و عليه :

$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{x\,x'+y\,y'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

تطبيق 1

نعتبر النقط :

$A(-1;3;2)$ ، $B(-4;0;1)$ و $C(1;2;-1)$

1 **طريقة 1 :** عيّن مركبات كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و استنتج أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستو

2 **طريقة 2 :** احسب الجداء السلمّي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ احسب القيمة المدوّرة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$ ثمّ استنتج أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا

كيف ؟

يتم تعيين المعادلة الديكارتية لمستو $\mathcal{P}$ ؟

■ **بمعرفة شعاع ناظمي $\vec{n}(a;b;c)$ و نقطة A من المستوى $\mathcal{P}$**

الطريقة 1 : لهذا المستوى معادلة من الشكل :

$$ax+by+cz+d=0$$

تسمح النقطة A بتعيين العدد الحقيقي d

الطريقة 2 : النقطة M تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$ معناه أنّ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ أيّ :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

■ **بمعرفة ثلاثة نقط A ، B و C**

– نتحقق أنّ هذه النقط ليست في استقامية

– نعيّن شعاع ناظميا $\vec{n}(a;b;c)$ للمستوى (ABC) : الثلاثية $(a;b;c)$ هي حل للجملة

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\end{cases}$$

تطبيق 2

1 عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة $A(-1;2;7)$ و يوازي المستوى $\mathcal{P}'$ ذي المعادلة :

$$2x-3y+z-5=0$$

2 $A(-1;0;4)$ ، $B(0;-5;1)$ و $C(3;-1;2)$ ثلاث نقط من الفضاء.

عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

كيف ؟

يتم تعيين التمثيل الوسيطي لمستو $\mathcal{P}$ ؟

يمكن تعيين مستو $\mathcal{P}$ بمعرفة نقطة و شعاعين غير مرتبطين خطيا (يُمثّلان أساسا للمستوى) . الثلاثية $(A;\vec{u},\vec{v})$ معلما للمستوى.

النقطة M تنتمي إلى المستوى $\mathcal{P}$ معناه يوجد عددان حقيقيان k و t حيث : $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}+t\vec{v}$ بمعنى

$$\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

و نستنتج تمثيلا وسيطيا للمستوى $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases}x=x_A+a\,k+\alpha\,t\\ y=y_A+b\,k+\beta\,t\\ z=z_A+c\,k+\gamma\,t\end{cases}$$

تطبيق 3

نعتبر النقط $A(2;1;0)$ ، $B(3;1;3)$ ، $C(5;0;0)$

1 أثبت أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا

2 برّر أنّ النقطة $M(x;y;z)$ تنتمي إلى المستوى (ABC) إذا و فقط إذا وُجد عددان حقيقيان t و s حيث :

$$\begin{cases}x=2+k+3s\\ y=1\qquad -s\\ z=\quad 3k\end{cases}$$

3 من بين النقط التالية، ما هي التي تنتمي إلى المستوى (ABC) ؟

$D(1;2;6)$ ، $E(7;0;6)$ ، $F(1;2;3)$ ، $G(6;0;3)$

كيف ؟

يتم الانتقال من التمثيل الوسيطي للمستوى إلى المعادلة الديكارتية و العكس ؟

■ **من المعادلة إلى التمثيل الوسيطي**

$\mathcal{P}$ المستوى ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$

الطريقة 1 : نختار مثلا $x=t$ و $y=t$ حيث t عدد حقيقي و نستنتج $z=-\dfrac{a+b}{c}t-\dfrac{d}{c}$ بدلالة t

الطريقة 2 : نبحث عن شعاعا توجيه للمستوى $\mathcal{P}$:

نختار ثلاثة نقط A ، B و C ليست على استقامية من المستوى $\mathcal{P}$، الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هما شعاعا توجيه للمستوى $(\mathcal{P})$

■ **من التمثيل الوسيطي إلى المعادلة**

ليكن المستوى $(\mathcal{P})$ المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases}x=x_A+a\,k+\alpha\,t\\ y=y_A+b\,k+\beta\,t\\ z=z_A+c\,k+\gamma\,t\end{cases}$$

الطريقة 1 : نعيّن علاقة بين x ، y و z مستقلة عن الوسيطين k و t

الطريقة 2 : نبحث عن شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوى $(\mathcal{P})$. هذا الشعاع يُحقّق $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\vec{n}.\vec{v}=0$

تطبيق 4

1 $(\mathcal{P})$ المستوى ذو المعادلة $2x-y+7=0$.

عيّن تمثيلا وسيطيا لهذا المستوى

2 $(\mathcal{P}')$ هو المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=\quad -t+k\\ z=2-t+2k\end{cases}$$

حيث t و k عددان حقيقيان. عيّن معادلة ديكارتية لهذا المستوي

كيف ؟

يتم تعيين التمثيل الوسيطي لمستقيم ؟

■ **بمعرفة شعاع توجيه** $\vec{u}(a;b;c)$ **و نقطة** $A(x_A;y_A;z_A)$ **من** $\mathcal{D}$

فإنّ لهذا المستقيم التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

مثال : الجملة التالية :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

هي تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $A(3;-2;1)$ و $\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه له

تطبيق 5

نعتبر في الفضاء النقطتين $A(1;-2;3)$ ، $B(0;0;1)$ ، المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة

$$3x - y + 4z - 2 = 0$$

و المستقيم $\mathcal{D}_1$ الممثل بالجملة التالية

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1 عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

2 عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}$ الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم $\mathcal{D}_1$

3 عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}'$ الذي يشمل النقطة B و العمودي على المستوي $\mathcal{P}$

كيف ؟

ندرس الوضعية النسبية لمستويين ؟

ليكن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ شعاعان ناظميان للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ على الترتيب

1 إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيان.

لتحديد الوضعية بدّقة : نعيّن نقطة من $\mathcal{P}_1$

■ إذا كان $A \in \mathcal{P}_2$ فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ منطبقان

■ إذا كان $A \notin \mathcal{P}_2$ فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيان تماما (أو منفصلان)

2 إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان و تقاطعهما مستقيم.

لتعيين تمثيلا وسيطيا لهذا المستقيم : نحل الجملة التي تشمل معادلتي $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ باختيار إحداثية من الإحداثيات كوسيط

تطبيق 6

نعتبر المستويات $\mathcal{P}_1$، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ المعرفة بالمعادلات التالية

$$\mathcal{P}_1 : \quad x + 3y - z + 1 = 0$$

$$\mathcal{P}_2 : \quad x + 4y + z - 3 = 0$$

$$\mathcal{P}_3 : \quad -x - 3y + z + 2 = 0$$

ادرس الوضعية النسبية للمستويين $\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ ثمّ للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_3$

كيف ؟

ندرس الوضعية النسبية لمستقيمين ؟

ليكن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ شعاعان توجيهيان للمستقيمين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ على الترتيب

1 إذا كان $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متوازيان.

لتحديد الوضعية بدّقة : نعيّن نقطة من $\mathcal{D}_1$

■ إذا كان $A \in \mathcal{D}_2$ فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ منطبقان

■ إذا كان $A \notin \mathcal{D}_2$ فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متوازيان تماما (أو منفصلان)

2 إذا كان $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ هما إمّا متقاطعان و إمّا ليسا من مستو واحد.

لتحديد الوضعية بدّقة: نفرض التقاطع و نحل الجملة، و في حالة الإجابة بالنفي فالمستقيمين ليسا من نفس المستوي

تطبيق 7

نعتبر المستقيمات $\mathcal{D}_1$ ، $\mathcal{D}_2$ و $\mathcal{D}_3$ الممثلة وسيطيابهذا الترتيب بالجمل :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -1 - 2s \\ z = 3 + s \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -7 + 7k \\ y = 4 - 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$$

حيث t، s و k أعداد حقيقية.

ادرس تقاطع المستقيمين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ ، $\mathcal{D}_2$ و $\mathcal{D}_3$ ثمّ المستقيمين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_3$

كيف ؟

ندرس الوضعية النسبية لمستقيم و مستو ؟

ليكن $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم $\mathcal{D}$ و $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي $\mathcal{P}$

1 إذا كان $\vec{u}.\vec{n} = 0$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متوازيان

لتحديد الوضعية بدّقة : نعيّن نقطة A من $\mathcal{D}$:

■ إذا كان $A \in \mathcal{P}$ فإنّ $\mathcal{D}$ محتوى في $\mathcal{P}$

■ إذا كان $A \notin \mathcal{P}$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متوازيان تماما

2 إذا كان $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متقاطعان في نقطة.

لتعيين هذه النقطة : نُعوض في معادلة $\mathcal{P}$ كل من x ، y و z بالإحداثيات الوسيطية للمستقيم $\mathcal{D}$، نحصل عندئذ على قيمة الوسيط التي تسمح بتعيين إحداثيات نقطة التقاطع

تطبيق 8

$\mathcal{P}$ مستو و $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ مستقيمين حيث:

$$\mathcal{P} : \quad x - y + z = 0$$

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = -8 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 9 - t \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -8 + 2k \\ y = 6 - k \\ z = 9 - k \end{cases}$$

حيث t و k عددان حقيقيان.

ادرس تقاطع المستقيمين $\mathcal{D}_1$ مع المستوي $\mathcal{P}$ ثمّ $\mathcal{D}_2$ مع $\mathcal{P}$