تمرين 1

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة 4 و النقطتين M و N ذواتا اللاحقتين $w=3+i\sqrt{3}$ و $\overline{w}=3-i\sqrt{3}$

1. عيّن الطويلة و عمدة للعدد المركب w . استنتج الطويلة و عمدة للعدد المركب $\overline{w}$
2. نعتبر العدد المركب $w-4$. اكتب هذا العدد على الشكل الجبري ثمّ على الشكل المثلثي
3. عيّن الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{w}{w-4}$. استنتج الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{\overline{w}}{\overline{w}-4}$
4. استنتج أنّ النقط O ، A ، M و N تنتمي إلى دائرة يطلب تحديدها

تمرين 2

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتين A و B ذواتا اللاحقتين $a=5-i\sqrt{3}$ و $b=4+2i\sqrt{3}$ و لتكن C منتصف $[OB]$

1. عيّن d لاحقة النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع
2. أثبت أنّ $1-\dfrac{a}{d}$ تخيّلي صرف. ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلث ODA ؟
3. لتكن النقطة E ذات اللاحقة $e=\dfrac{2a}{3}$. عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\dfrac{d-b}{d-e}$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقط B ، D و E ؟

تمرين 3

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z+1+i)(z^2-8\sqrt{3}z+64)$

1. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$ ثمّ اكتب الحلول على الشكل الأسي
2. نضع $z_1=-1-i$ و $z_2=4\sqrt{3}-4i$
   (ا) اكتب $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي
   (ب) استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$
   (ج) بيّن أنّ العدد $\left(\dfrac{8}{\sqrt{2}}\times\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{144}$ هو حقيقي
3. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B التي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 ، عيّن لاحقة النقطة C حتى تكون النقطة O مركز ثقل المثلث ABC

تمرين 4

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$
2. نسمّي A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$
   (ا) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي
   (ب) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك
3. (ا) عيّن العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C ، محددا نسبته و زاويته
   (ب) استنتج طبيعة المثلث ABC
4. (ا) عيّن العناصر المميّزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق: $|z-z_1|^2+|z-z_3|^2=5$
   (ب) عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $|z-z_1|=|z-z_3|$

تمرين 5

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. (أ) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$

نسمّي z_1 الحل الذي جزؤه التخيّلي موجب

(ب) اكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)$ على الشكل الأسي ثمّ عيّن الشكل الجبري لـ $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^6$

2. M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' نقطة من المستوي لاحقتها z' حيث :

$$z'=z^2-4z$$

A ، B و I ثلاث نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب هي : $z_A=2$ ، $z_B=-4$ و $z_I=3$

(أ) اكتب $(z'+4)$ بدلالة $(z-2)$ ثمّ استنتج $|z'+4|$ بدلالة $|z-2|$ و $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$

(ب) برهن أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 2 فإنّ النقطة M' هي من دلئرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

(ج) برهن أنّه إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين فإنّ الشعاعين $\overrightarrow{BM'}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا

(د) عيّن العدد المركب z حتى يكون الرباعي $OMIM'$ متوازي الأضلاع

تمرين 6

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2. (أ) لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=3\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$

(ب) اكتب اكتب z_A ، z_B و $(1+\mathrm{i})z_C$ على الشكل الأسي

(ج) اكتب العدد المركب $\left(\frac{(1+\mathrm{i})z_A}{6\sqrt{2}}\right)$ على الشكل الجبري

(د) بيّن أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها ، يطلب تعيين نصف قطرها

(ه) احسب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثمّ جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3. ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(أ) عيّن لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R ثم تحقق أنّ النقط A ، C و C' في استقامية

(ب) عيّن لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R ثمّ حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

تمرين 7

أجب بصحيح أو بخطأ مع تبرير الجابة على الأسئلة التالية

1. من أجل كل عدد مركب z ، $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=(\mathrm{Re}(z))^2$

2. z عدد مركب غير معدوم. في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها z ، $\overline{z}$ و $\frac{z^2}{\overline{z}}$ على الترتيب هي من نفس الدائرة ذات المركز O

3. من أجل كل عدد مركب z، إذا كان $|1-\mathrm{i}z|=|1+\mathrm{i}z|$ فإنّ $\mathrm{Im}(z)=0$

4. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. z و z' عددان مركبان غير معدومين، M و M' نقطتان لاحقتيهما z و z' على الترتيب. إذا كان $|z-z'|=|z+z'|$ فإنّ المستقيمين (OM) و (OM') متعامدان

تمرين 8

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $3z^3-2z^2+4z+16=0 \quad \ldots \quad (1)$

1. بيّن أنّ العدد $-\frac{4}{3}$ هو حلا للمعادلة (1)
2. بيّن أنّه إذا كان z حلا للمعادلة فإنّ $\overline{z}$ هو أيضا حلا للمعادلة (1)
3. ليكن α عدد مركب غير معدوم، نعتبر النقط A ، M ، N و P التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-2$ ، $z_M=\alpha$ ، $z_N=\frac{3\alpha^2}{2}$ و $z_P=\frac{8}{\alpha}$. أثبت أنّه إذا كان الرباعي $MNAP$ متوازي أضلاع فإنّ α حل للمعادلة (1)
4. نضع : $\alpha=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$
   (ا) اكتب كلا من z_M ، z_N ، z_P على الشكل الأسي
   (ب) أنشئ النقط A ، M ، N و P بيّن أنّ الرباعي $MNAP$ متوازي أضلاع، و استنتج عندئذ حلول المعادلة (1)

تمرين 9

الجزء الأول عيّن العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2\mathrm{i}\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

الجزء الثاني المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_C e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

1. (ا) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا
   (ب) تحقق أنّ العدد المركب $\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي 2
2. D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+\mathrm{i}$
   (ا) حدّد النسبة و زاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحوّل D إلى A
   (ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
3. عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة التي تحقّق : $z=k(1+\mathrm{i})e^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

تمرين 10

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$ و $z_B=\overline{z_A}$
   (ا) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي
   (ب) بيّن أنّ : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$
   (ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا
3. f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$
   (ا) عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميّزة
   (ب) احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f

(ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$

تمرين 11

نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة $p(z)$ حيث $p(z)=z+\frac{4}{z}$ و z غير معدوم

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=-2$. نرمز بـ z_1 لحل هذه المعادلة الذي جزؤه الحقيقي موجب و بـ z_2 للحل الآخر
2. (أ) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي
   (ب) بيّن أنّ : $z_1^{2016}+z_1^{2016}=2^{2017}$
   (ج) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n بحيث يكون z_1^n تخيليا صرفا ؟
3. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\alpha$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-1-i\sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي موجب
   (أ) جد قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع
   (ب) بيّن أنّ $p(z)=\overline{p(z)}$ إذا و فقط إذا كان $(z-\overline{z})(z\overline{z}-4)=0$
   (ج) استنتج (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي من أجلها يكون $p(z)$ حقيقيا
   (د) تحقق أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى المجموعة (Γ)

تمرين 12

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z $(z\neq 2-3i)$ التالية :

$$z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

1. حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=1+\sqrt{5}i$ و $z_B=1-\sqrt{5}i$
   تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها
3. نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث :

$$z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

   النقط C ، D و E لواحقها على الترتيب $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_E=3$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$
   (أ) عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM
   (ب) استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقق أنّ $5E$ تنتمي إلى (γ)

تمرين 13

الجزء الأول

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$
2. جد العددين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1-3z_2=5i\sqrt{2} \\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2} \end{cases}$

الجزء الثاني المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ، D و H لاحقاتها على الترتيب : $z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1-i$ ، $z_D=1-i$ و $z_H=\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ حيث E النقطة التي تحقق : $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$

1. اكتب z_H على الشكل الأسي و استنتج طبيعة المثلث BEC
2. S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=z_Az+z_B$
   (ا) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميّزة ؟
   (ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD
   (ج) عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها
3. عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما.

تمرين 14

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. (ا) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
   نرمز بـ z_1 للحل ذي الجزء التخيّلي الموجب و z_2 للحل الآخر
   (ب) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي
   (ج) تحقق أنّ : $\left(\dfrac{z_1}{2}\right)^6+\left(\dfrac{z_2}{2}\right)^6=-2$
2. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=4+\sqrt{3}+i$
   (ا) أثبت أنّ $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثمّ استنتج أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميّزة
   (ب) ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ عيّن لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث
3. لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تختلف عن $2+i$ حيث :

$$\arg(\overline{z}-2+i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

(k عدد صحيح). تحقق أنّ النقطة I تنتمي إلى المجموعة (E)، عيّن حينئذ المجموعة (E)

تمرين 15

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$
   (ا) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي
   (ب) بيّن أنّ : $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$

(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا

3. f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$

(ا) عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميّزة

(ب) احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f

(ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$

تمرين 16

الجزء الأول

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$

2. اكتب الحلول على الشكل الأسي

الجزء الثاني المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ و $c = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$

1. علّم النقط A ، B و C في المعلم السابق

2. نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A و نسبته 3 و زاويته π و النقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب

الجزء الثالث نضع : $z = \frac{d-b}{e-b}$

1. اكتب العدد المركب z على الشكل المثلثي

2. نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I. ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

تمرين 17

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1 + \mathrm{i}$

1. (ا) عيّن ثمّ أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z = z_0 + 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$

(ب) عيّن ثمّ أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z = z_0 + k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و θ يمسح $\mathbb{R}^+$

(ج) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ')

2. نسمّي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث $z_1 = z_0 + 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

(ا) عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB

(ب) عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

(ج) عيّن العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A;\alpha);(C;\beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

(د) عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$

تمرين 18

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + z + 1 = 0$

.2 نعتبر النقط A ، B و M ذات اللاحقات : $z_A = -\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب. (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A)

(ا) اكتب z_A على الشكل الأسي

(ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg[(z-z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$

.3 (ا) التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = z_A z + z_B\sqrt{3}$

ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميّزة

(ب) التحاكي h ، يرفق بالنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = -2z + 3i$

عيّن نسبة و مركز التحاكي h

(ج) نضع $S = h \circ r$ (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين h و r)

عيّن طبيعة التحويل S مبرزا عناصره المميّزة، ثمّ تحقق أنّ عبارته المركبة هي : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$

.4 نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i و النقط C ، D و E حيث $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$

بيّن أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية

.5 (ا) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع θ عدد حقيقي

(ب) عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S

تمرين 19

.1 (ا) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$

(ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية : $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4z + 1 - 4i(1-\sqrt{3}) = 0$

.2 θ عدد حقيقي حيث : $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له

(ا) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي

(ب) عيّن θ علما أنّ : $\dfrac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب z_0)

(ج) n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل، اكتب العدد المركب $\left[\dfrac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي

(د) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\dfrac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما

.3 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A = 2-i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = 1+i\sqrt{3}$

(ا) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

(ب) استنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

(ج) E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث : $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$

- بيّن أنّ : $z_E = \dfrac{14}{5} + \dfrac{3}{5}i$
- بيّن أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة

.4 M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

(ا) عيّن z_I لاحقة النقطة I

(ب) α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقق : $z - z_I = e^{i\alpha}$

- تحقق أنّ النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)
- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$

تمرين 20

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A و M نقطتان من المستوي، لاحقتاهما 2 و z على الترتيب.

نعتبر، من أجل $z\neq -2$ ، العدد المركب $z'=\dfrac{z}{z-2}$ و النقطة M' ذات اللاحقة z'.

نُريد تعيين مجموعات النقط التالية :

- (E) : مجموعة النقط M حيث z' حقيقي
- (F) : مجموعة النقط M حيث z' حقيقي غير معدوم
- (G) : مجموعة النقط M حيث z' تخيّلي صرف
- (H) : مجموعة النقط M حيث z' تخيّلي صرف غير معدوم
- (I) : مجموعة النقط M حيث $\left|z'\right|=1$

الجزء الأول طريقة جبرية

نضع $z=x+\mathrm{i}y$ مع x و y عددان حقيقيان، و $z'=x'+\mathrm{i}y'$ مع x' و y' عددان حقيقيان.

1. أثبت أنّ:

$$x'=\frac{x^2+y^2-2x}{(x-2)^2+y^2} \quad \text{و} \quad y'=\frac{-2y}{(x-2)^2+y^2}$$

2. عيّن المجموعة (E) ثمّ عيّن المجموعة (G)

الجزء الثاني طريقة هندسية

1. عبّر هندسيا على $|z'|$ ثمّ استنتج المجوعة (I)
2. عبّر هندسيا على $\arg(z')$ ثمّ عيّن المجموعات (E) ، (F) ، (G) و (H)

الجزء الثالث استعمال المرافق

1. أثبت أنّ z' حقيقي إذا و فقط إذا كان $z=\overline{z}$ و استنتج المجموعة (E)
2. كذلك، أثبت أنّ النقطة M' تنتمي إلى (G) إذا و فقط إذا كان $2\,|z|^2=2\,\mathrm{Re}(z)$

استنتج معادلة للمجموعة (G) ثمّ عيّن (G)