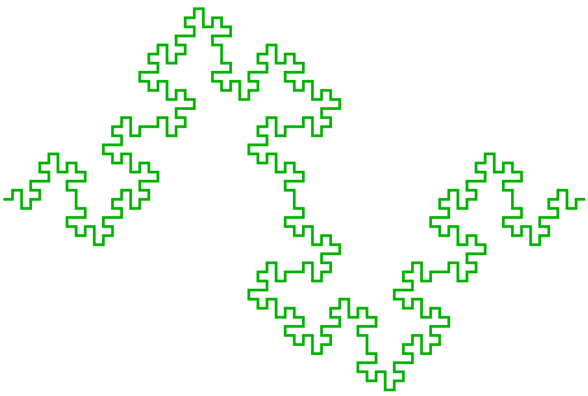
نهائي علوم و رياضيات

Version 1.1

العد و الاحتمالات

كمال حامدي

6



6

في هذا المحور

أنشطة 2
العد (القوائم، الترتيبات، التوفيقات) 4
أعمال موجهة 9

أنشطة

النشاط الأول (عد قوائم : الشجرة و الخانات)

الجزء الأول مسائل في العد

يؤول حل مسألة عد إلى الإجابة عن السؤال التالي: إذا كانت E مجموعة ذات n عنصرا و p عدد طبيعي معلوم، ما هو عدد القوائم المكونة من p عنصرا من E التي يُمكن تشكيلها ؟

ملاحظة : القائمة تحترم الترتيب، فهناك العنصر الأول في القائمة و هناك العنصر الثاني في القائمة و هكذا، فالقائمة $(a;b;c;\ldots)$ مثلا تختلف عن القائمة $(a;c;b;\ldots)$، كذلك يُمكن للعنصر نفسه أن يظهر مرّات عدّة في القائمة الواحدة، مثال ذلك القائمة $(a;a;b;a;\cdots)$

المثال الأول: الظهر أو الوجه (Pile ou Face)

نرمي قطعة نقد متوازنة ثلاث مرات متتابعة و نسجل، بالترتيب، في كل رمية : P إذا ظهر "الظهر" أو F إذا ظهر "الوجه". يُمكن أن نُعبّر عن كل نتيجةٍ بـ "كلمة"، فمثلا PFF تعني أنّ المخرج الأول كان "الظهر" و المخرج "الوجه" كان في الرمية الثانية و الثالثة.

- ما هو عدد النتائج المُمكنة لهذه التجربة ؟

لاحظ أنّ المطلوب هو كتابة كل القوائم ذات ثلاث عناصر المأخوذة من المجموعة $E = \{P; F\}$ ذات عنصرين. في هذا المثال $n = 2$ و $p = 3$

المثال الثاني: الترتيب

في مسابقةٍ يتنافس 5 مترشحين. نُريد ترتيبهم

- ما هو عدد النتائج الممكنة لهذه المسابقة مع افتراض عدم وقوع حالات تساوٍ في الترتيب؟

نرمز إلى المترشحين بـ A، B، C، D، E و بـ $\mathcal{E}$ إلى المجموعة $\mathcal{E} = \{A;B;C;D;E\}$، إنّ عدد النتائج الممكنة هو عدد جميع القوائم المُكونة من خمسة عناصر المأخوذة من $\mathcal{E}$، نُسمّي هذه القائمة تبديلة .

في هذا المثال $n = 5$ و $p = 5$.

المثال الثالث: **سحب دون إرجاع**

يحوي صندوق 5 كرات مرقمة 1، 2، 3، 4، 5. نسحب على التوالي ثلاث كرات دون إرجاع (أي بعد كل سحبة لا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق). نُسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكرات المسحوبة (نحصل على قائمة من 3 أرقام مختلفة مثنى مثنى، مثلا 2، 5، 1.

- ما هو عدد المخارج المُمكنة لهذه التجربة ؟

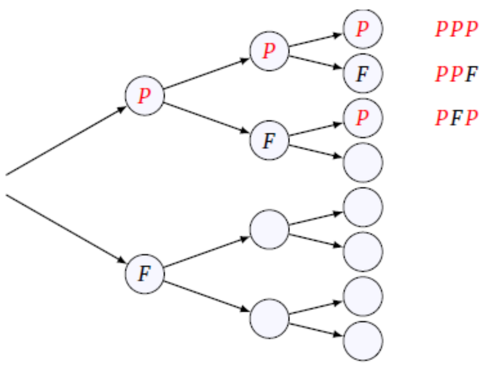
عدد هذه المخارج هو عدد القوائم ذات ثلاث عناصر المتمايزة مثنى مثنى المأخوذة من $\mathcal{E} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

في هذا المثال $n = 5$ و $p = 3$.

الجزء الثاني تقنيات للعد لنرجع إلى المثال الأوّل أعلاه

استعمال الشجرة

لتعيين جميع النتائج الممكنة، يُمكن الاستعانة بالشجرة المقابلة التي يُطلب منك إتمامها



- ما هي النتائج المُمكنة؟ ما هو عددها؟

من السهل تعداد الفروع النهائية لمثل هذه الشجرة حسب "المبدأ الأساسي في العد" الذي ينص على ما يلي: إذا تفرع كل فرع رئيسي إلى نفس العدد من الفروع الأخرى و إذا تفرع كذلك كل من هذه الفروع إلى نفس العدد من الفروع الأخرى، و هكذا... ، فإنّ عدد الفروع النهائية يكون مساويا لجُداء هذه الأعداد

استعمال الخانات

بدلا من استعمال الشجرة، يُمكن استعمال تقنية "ملأ الخانات":

فمثلا عند دراسة المثال الأوّل المتعلق برمي قطعة نقد، يُمكن القول أنّنا نحصل على جميع المخارج الممكنة عن طريق ملأ كل واحدة من الخانات المرقمة من 1 إلى 3 (للمحافظة على الترتيب) بالحرف P أو الحرف F.

الخانة 1	**الخانة 2**	**الخانة 3**

- كم خياراً لدينا لملء الخانة الأولى؟ من أجل كل خيار من هذه الخيارات، كم خياراً لدينا لملء الخانة الثانية؟ من أجل كل إمكانية من بين هذه الإمكانيات، كم خياراً لدينا لملء الخانة الثالثة؟
- استنتج، إذن، عدد طُرق ملء الخانات الثلاثة

تطبيق

1. باستعمال تقنية ملء الخانات، أجب عن أسئلة المثالين الثاني و الثالث من الجزء الأول.
2. لتكن E مجموعة الأرقام من 1 إلى 9.

   ما عدد الأعداد المؤلفة من 4 أرقام التي يُمكن تكوينها من أرقام المجموعة E و التي خانة مئاتها تحمل الرقم 2.

3. لتكن E مجموعة الأرقام من 0 إلى 9.
ما عدد الأعداد المؤلفة من 4 أرقام مختلفة مثنى مثنى التي يُمكن تكوينها من أرقام المجموعة E و التي خانة مئاتها تحمل الرقم 2.

النشاط الثاني التوفيقات

- القول أنّ F مجموعة جزئية (أو جزء) من المجموعة E معناه أنّ كل عنصر من F هو عنصر من E.
(نقول أيضا أنّ المجموعة F محتواة في المجموعة E)
- نُسمّي توفيقة ذات p عنصرا من عناصر E كل جزء من E ذي p عنصرا.

نفرض أنّ عدد عناصر E هو n.
الهدف من هذا النشاط هو معرفة حساب عدد التوفيقات ذات p عنصرا من عناصر E $(0 \leq p \leq n)$

مثال: E مجموعة ذات 5 عناصر. نضع $\text{E} = \{a; b; c; d; e\}$.
نُريد حساب عدد التوفيقات ذات 3 عناصر من E. نرمز بـ C_5^3 إلى هذا العدد.

1. نعلم، حسب النشاط الأول، حساب عدد القوائم ذات ثلاث عناصر متمايزة مثنى مثنى (أي عدد الترتيبات ذات ثلاثة عناصر من E).
ما هو هذا العدد $_1$ ؟
2. (أ) باستعمال عناصر التوفيقة (أو المجموعة الجزئية) $\{a; b; c\}$ مثلا، ما عدد الترتيبات ذات ثلاثة عناصر التي يُمكن تشكيلها؟ نرمز بـ n_2 إلى هذا العدد
(ب) برِّر إذن، المساواة $n_1 = n_2 \times C_5^3$، ثمّ استنتج قيمة C_5^3.

العد (القوائم، الترتيبات، التوفيقات)

في هذه الفقرة، E تدلّ على مجموعة غير خالية ذات n عنصرا.

تبديله لمجموعة

تعريف
نسمّي تبديله للمجموعة E كل قائمة مكوّنة من n عنصراً، تشمل جميع عناصر E

مثال : $E = \{a; b; c; d\}$

القائمتان $(a; b: c; d)$ و $(a; c; b; d)$ هما تبديلتان للمجموعة E.

ملاحظة
القائمة تظم فكرة الترتيب : فهناك العنصر الأوّل، العنصر الثاني، و هكذا .... و عليه $(a; b; c)$ و $(b; a; c)$ هما قائمتان مختلفتان

يؤول إنشاء تبديلة للمجموعة E إلى ملء أربع خانات مرقّمة، بحيث في النهاية كل خانة تحوي حرفا واحدا من E و أنّ الحروف الواردة في الخانات مختلفة مثنى مثنى. هناك أربع خيارات ممكنة لملء الخانة 1، و لكل واحد من هذه الخيارات يبقى ثلاث خيارات لملء الخانة 2، إذن هناك 4×3 خياراً ممكنا لملء الخانتين 1 و 2، و لكل منها هناك خياران لملء الخانة 3 و عليه يوجد $4 \times 3 \times 2$ خياراً لملء الخانات الثلاثة الأولى و في النهاية يُوافق كل من هذه الخيارات خياراً واحداً لملء الخانة 4. إذن عدد تبديلات للمجموعة E هو $4 \times 3 \times 2 \times 1$

الخانة 4	الخانة 3	الخانة 2	الخانة 1
1 خيارات	2 خيارات	3 خيارات	4 خيارات

الحالة العامة : بنفس الطريقة تُعالج الحالة العامة : هناك n خياراً لملء الخانة 1، و $(n-1)$ خياراً لملء الخانة 2، و هكذا ... حتى الخيار الوحيد لملء الخانة n، إذن، في النهاية، هناك $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ تبديلة للمجموعة E

نتيجة

عدد تبديلات لمجموعة ذات n عنصر، $n \geq 1$، يساوي :

$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

يُرمز إلى هذا العدد بالرمز $n!$ و يُقرأ مفكوك n أو n عاملي

ملاحظة في مسألة عد، نُفسر $n!$ بأنه: عدد الطرائق المختلفة لترتيب عناصر مجموعة مكونة من n عنصراً، أو إنه عدد القوائم المرتبة المؤلّفة من n عنصراً

مثال ما عدد النتائج المختلفة الممكنة لسباق يضم ستة أحصنة (مع فرضية عدم وصول حصانين أو أكثر إلى خط النهاية في اللحظة ذاتها) ؟

إنّ أية نتيجة للسباق هي تبديلة لمجموعة الأحصنة الستة. إذن هناك $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ نتيجة مختلفة

الترتيبات

تعريف

نسمي **ترتيبة** ذات p عنصراً من المجموعة E كل قائمة مكوّنة من p عنصراً مأخوذة من عناصر E مختلفة مثنى مثنى $(1 \leq p \leq n)$

مثال

$E = \{a; b; c; d; e\}$. إذن $(a; e; d)$ هي ترتيبة لـ 3 عناصر من E. لاحظ أنّها تبديلة للمجموعة الجزئية $F = \{a; d; e\}$. لإنشاء مثل هذه الترتيبة نقوم بملء ثلاث خانات مرقمة من 1 إلى 3 و بإجراء مناقشة مماثلة لما أجريناه في المثال السابق نجد أنّ عدد الترتيبات لثلاث عناصر مأخوذة من E هو $5 \times 4 \times 3$

الحالة العامة : تجرى معالجة الحالة العامة بالطريقة نفسها. إذا كانت E مجموعة تشمل n عنصراً $n \geq 1$، فإنّ عدد الترتيبات ذات p عنصراً من E، $1 \leq p \leq n$، يساوي :

$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-(p-1))$

عدد الترتيبات

عدد الترتيبات ذات p عنصراً من بين n عنصراً، يساوي :

$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$

يُرمز إلى هذا العدد بالرمز A_n^p

ملاحظة

نموذج للحصول على مثل هذه الترتيبات هو السحب على التوالي دون إرجاع لـ p عنصر من صندوق يشمل n عنصراً

القوائم ذات p عنصراً مع التكرار

لأننا نسمح بالتكرارات فعند إنشاء قائمة ذات p عنصراً من E ، لدينا n خياراً ممكنا لكل خانة من 1 إلى p إذن عدد هذه القوائم هو n^p

الخانة p	...	الخانة 2	الخانة 1
n خياراً	...	n خياراً	n خياراً

مثلا

$E = \{a; b\}$ و $p = 3$

القوائم مع التكرار هي :
$(a; a; a)$ ، $(a; a; b)$ ،
$(a; b; a)$ ، $(a; b; b)$ ،
$(b; a; a)$ ، $(b; a; b)$ ،
$(b; b; a)$ ، $(b; b; b)$.

نتيجة

p عدد طبيعي كيفي، $p \geq 1$ ، عدد القوائم ذات p مع التكرار من E هو n^p

تمرين محلول 1 السحب دون إرجاع لأربع كرات من بين تسع كرات ★☆☆☆☆

يحتوي صندوق على تسع كرات مرقّمة من 1 إلى 9. نسحب على التوالي أربع كرات دون إرجاع و نسجّل بالترتيب أرقام الكرات المسحوبة. ما عدد الأعداد المكوّنة من أربع خانات التي يُمكن تشكيلها بهذه الطريقة ؟

حل

هناك 9 خيارات لآحاد العدد الناتج، و بعد سحب الكرة التي تحمل هذا الخيار يبقى 8 خيارات لعشرات هذا العدد نحددها بسحب الكرة الثانية، ثمّ نسحب الكرة الثالثة من بين 7 كرات متبقية لتحديد خانة المئات، و أخيراً نختار خانة الألوف بسحب الكرة الرابعة من بين الكرات الست المتبقية. نستنتج إذن أنّه بالإمكان تشكيل $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ عدد مختلف بهذا الأسلوب

◇

تمرين محلول 2 عدد القوائم مع التكرار ★☆☆☆☆

كم كلمة من ثلاثة حروف يمكننا تكوينها انطلاقا من الحروف المأخوذة من كلمة $MATHS$ ؟

حل

نتخيّل خمسة خانات علينا ملؤها بحروف كلمة $MATHS$ التي فيها ست حروف مختلفة. لملء الخانة الأولى لدينا 5 خيارات، و لمّا كان لا يوجد ما يمنع من تكرار الحروف في الكلمة، فهناك أيضا خمس خيارات لملء الخانة الثانية و كذلك هناك خمس خيارات لملء الخانة الثالثة. في المحصّلة هناك $5 \times 5 \times 5 = 225$ كلمة من ثلاثة حروف حروفها مأخوذة من حروف كلمة $MATHS$

◇

التوفيقات

تعريف

E مجموعة ذات n عنصرا و p عدد طبيعي حيث $0 \leq p \leq n$.

نسمّي توفيقة ذات p عنصراً من E كل مجموعة جزئية (أو جزء) من E تشمل على p عنصرا

ملاحظة

نموذج للحصول على مثل هذه التوفيقات هو السحب في آن واحد لـ p عنصر من صندوق يشمل n عنصراً

مثال

$E = \{a; b; c; d\}$

- التوفيقات ذات عنصرين من E هي المجموعات $\{a; b\}$ ، $\{a; c\}$ ، $\{a; d\}$ ، $\{b; c\}$ ، $\{b; d\}$ و $\{c; d\}$. عددها 6
- التوفيقات ذات عنصراً واحداً من E هي المجموعات $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ و $\{d\}$. عددها 4
- التوفيقة ذات 4 عناصر من E هي المجموعة E نفسها
- التوفيقة التي لا تشمل على أي عنصر من E هي المجموعة الخالية $\emptyset$.

ترميز : يُرمز إلى عدد المجموعات الجزئية (أي التوفيقات) ذات p عنصراً من مجموعة ذات n عنصراً بالرمز C_n^p و يُقرأ (p من بين n). في المثال السابق نكتب في الحالة الأولى أنّ $C_5^2 = 6$

ملاحظة

الترميز الشائع حاليا هو $\binom{n}{p}$

عدد التوفيقات :

مثال : لتكن المجموعة $E = \{a; b; c; d; e\}$ و $p = 3$ لنحسب C_5^3 عدد المجموعات الجزئية (التوفيقات) ذات 3 عناصر مأخوذة من E.

لنختار مثلا الجزء $F = \{a; b; c\}$ اذا ثلاثة عناصر من E. $(a; b; c)$ ، $(a; c; b)$ ، $(b; a; c)$ ، $(b; c; a)$ ، $(c; a; b)$ ، $(c; b; a)$ هي التبديلات الستة ($3!$) للتوفيقة F و كلّ منها هي ترتيبة ذات ثلاث عناصر للمجموعة E. إذن من كل توفيقة ذات ثلاث عناصر من E يُمكن أن نُولّد $3!$ من الترتيبات ذات ثلاث عناصر من E. و استنادا إلى المبدأ الأساسي للعد فإنّ :

(عدد التوفيقات ذات ثلاث عناصر من E) $\times 3! =$ عدد الترتيبات ذات ثلاث عناصر من E

بمعنى :

$$A_5^3 = 3! \times C_5^3 \quad \text{و منه} \quad C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!}$$

نتيجة

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $0 \leq p \leq n$،

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

مثال : عدد التوفيقات ذات ثلاث عناصر مأخوذة من مجموعة ذات 10 عناصر هو :

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

تمرين محلول 3 عدد التوفيقات ★★☆☆☆

نسحب عشوائيا و في آن واحد 4 كرات من صندوق يحوي 10 كرات مرقمة : 6 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 6، 3 كرات خضراء مرقمة من 1 إلى 3 و كرة واحدة بيضاء تحمل الرقم 1

1. ما عدد النتائج الممكنة لهذا السحب ؟
2. ما عدد النتائج الممكنة التي تضم كرتين حمراوين فقط ؟
3. ما عدد النتائج الممكنة التي تضم على الأقل كرة تحمل الرقم 1 ؟

حل

1. كل نتيجة لهذا السحب هي توفيقة ذات 4 عناصر مأخوذة من بين 10. إذن عدد النتائج الممكنة هو

$$C_{10}^{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

2. لاصطناع نتيجة تضم كرتين حمراوين فقط، نبدأ باختيار كرتين حمراوين من بين الكرات الحمراء الستة، ثمّ نختار كرتين من بين الكرات الأربع الباقية : هناك C_6^2 خياراً ممكنا للكرتين الحمراوين من بين الكرات الستة المعطاة و يُوافق كل واحد من هذه الخيارات C_4^2 خياراً ممكنا لبقية كرات السحبة إذن العدد المطلوب هو :

$$C_6^2\times C_4^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=90$$

3. النتائج التي تضم على الأقل كرة تحمل الرقم 1 هي كل التوفيقات التي تضم كرة واحدة فقط تحمل الرقم 1 أو التوفيقات التي تضم كرتين فقط تحملان الرقم 1 أو التوفيقات التي تضم ثلاث كرات فقط تحمل الرقم 1 أو التوفيقات التي تضم أربع كرات تحمل الرقم 1. من الأسهل حساب عدد مجموعة النتائج التي لا تضمّ أيٌّ منها كرة تحمل الرقم 1، نصطنع نتيجة من هذه المجموعة عن طريق اختيار أربع كرات من بين التي لا تحمل أيٌّ منها الرقم 1 و عدد ها 7 إذن $C_7^4=35$ هو عدد النتائج التي لا تضم أيّ منها كرة تحمل الرقم 1

و منه عدد النتائج التي تضم كل منها كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1 هو :

$$C_{10}^{4}-C_7^4=210-35=175$$

> **ملاحظة**
> عند حل مسألة تتطلّب عد :
> - تخيّل طريقة لاصطناع الأشياء الواجب عدّها.
> - تبيّن إن كان الترتيب ضروريا، فكّر بأسلوب ملء الخانات، و إن لم يكن الترتيب ضروريا ففكّر بالتوفيقات

◇

تمرين محلول 4 عدد التوفيقات ★☆☆☆☆

نريد تأليف لجنة مكوّنة من خمسة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلا و أربع عشر امرأة

1. كم لجنة يمكننا تأليفها ؟
2. كم لجنة مختلفة مكوّنة من رجلين و امرأتين يمكننا تأليفها ؟
3. كم لجنة مختلفة مكوّنة من ثلاثة رجال و امرأتين بشرط أنّ أحمد و فاطمة يكونان ضمن اللجنة ؟

خواص التوفيقات و دستور ثنائي الحد

...

أعمال موجهة

تمرين مع حل نموذجي < أنواع السحب ★☆☆☆☆

يحوي صندوق أربع كرات تحمل الأرقام 10، 20، 30، 40

السحب المتتالي بالإرجاع

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب **على التوالي ثلاث كرات بالإرجاع**، أي بعد كل سحبة، نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق.
- نُسجل، **بترتيب السحب**، أرقام الكرات المسحوبة و يمكن عندئذ، تمثيل كل نتيجة بثلاثية أو قائمة مرتبة لثلاثة عناصر من المجموعة $E = \{10; 20; 30; 40\}$. فمثلا الثلاثية $(40; 40; 30)$ تعني السحب التالي: الكرة المسحوبة الأولى تحمل الرقم 40، الثانية تحمل الرقم 40 و الثالثة تحمل الرقم 30.

1. كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة؟
2. كم عدد النتائج الممكنة في كل حالة من الحالات التالية؟
   (أ) الكرة المسحوبة الأولى تحمل الرقم 10، الثانية تحمل الرقم 40 و الثالثة تحمل الرقم 20 ؟
   (ب) الكرة المسحوبة الأولى تحمل الرقم 30 و الثانية تحمل الرقم 20 ؟
   (جـ) الكرة المسحوبة الثانية تحمل الرقم 40 و الثالثة تحمل الرقم 30 ؟
   (د) الكرة المسحوبة الثانية تحمل الرقم 20 ؟

ملاحظة

السحب على التوالي ثلاث كرات بالإرجاع هو اختيار ثلاثية مرتبة

السحب المتتالي دون إرجاع

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب **على التوالي ثلاث كرات دون إرجاع**، أي بعد كل سحبة، لا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق.
- نُسجل، **بترتيب السحب**، أرقام الكرات المسحوبة و يمكن كذلك، تمثيل كل نتيجة بثلاثية أو قائمة مرتبة لثلاثة عناصر من المجموعة $E = \{10; 20; 30; 40\}$، لكن في هذه الحالة تكون **عناصر الثلاثية متمايزة مثنى مثنى.**

1. ما هو عدد النتائج الممكنة؟
2. أجب على السؤال 2. للجزء الأول بالنسبة لهذا النوع من السحب.

ملاحظة

بصفة عامة، نُسمّي **ترتيبة** لـ p عنصراً من بين n، كل قائمة مرتبة لـ p عنصراً، دون تكرار و متمايزة مثنى مثنى مأخوذة من بين n عنصراً. في حالة $p = n$ مثل هذه القائمة تُسمى **تبديلة** لـ n عنصراً.

السحب في آن واحد

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب **في آن واحد ثلاث كرات** من الصندوق
- نُسجل أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة.

و يمكن، تمثيل نتيجة التجربة بمجموعة جزئية مكوّنة من ثلاثة عناصر مأخوذة من $E = \{10; 20; 30; 40\}$.

1. كم عدد النتائج الممكنة؟
2. كم عدد النتائج الممكنة و التي تشمل الرقم 20؟
3. كم عدد النتائج الممكنة و التي تشمل الرقمين 30 و 40؟

ملاحظة

السحب في آن واحد لـ p عنصراً من بين n، هو اختيار مجموعة جزئية مكوّنة من p عنصراً بدون ترتيب. عدد هذه الاختيارات هو C_n^p

6

في هذا المحور

المفاهيم الأساسية للاحتمالات.. 9
قانون الاحتمال لتجربة عشوائية 10
المتغيّر العشوائي.. 11
الاحتمالات الشرطية.. 13
الحوادث المستقلة و المتغيّرات العشوائية المستقلة........................ 17
تمارين للتعمق.. 18

المفاهيم الأساسية للاحتمالات

التجربة العشوائية : التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية :

- جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها
- لا يُمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي و مؤكد قبل إجرائها
- يُمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة

مخرج لتجربة عشوائية: أو إمكانية لتجربة عشوائية هو كل نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية

مجموعة الامكانيات : هي المجموعة المكوّنة من جميع النتائج الممكنة للتجربة. يُرمز لها عادة بالرمز Ω

الحادثة أو الحدث : عندما يكون عدد عناصر مجموعة الامكانيات Ω منتهيا ، نُعرف الحادثة بأنّها أيّ مجموعة جزئية من Ω

يُقال أنّ الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A

الحادثة الأولية : أو الحادثة البسيطة هي الحادثة المكوّنة من إمكانية (عنصر واحد من Ω)

الحادثة الأكيدة : هي الحادثة Ω

الحادثة المستحيلة: هي الحادثة $\emptyset$

اتحاد حادثتين : (أو الحادثة A أو B) هي الحادثة المكوّنة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معا.

تقع هذه الحادثة إذا و فقط إذا وقعت إحدى الحادثتان A أو B أو كلاهما و رمزها $A \cup$

تقاطع حادثتين : (أو الحادثة A و B) هي الحادثة المكوّنة من جميع العناصر المشتركة في A و في B.

تقع هذه الحادثة إذا و فقط إذا وقعت الحادثتان A و B في آن واحد و رمزها $A \cap B$

الحادثة العكسية للحادثة A : (أو متممة أو مكملة الحادثة A) هي الحادثة المكوّنة من جميع عناصر Ω

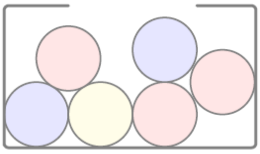
قانون الاحتمال لتجربة عشوائية

قانون الاحتمال

عندما يكون عدد مخارج تجربة عشوائية منتهيا، نعرّف على مجموعة المخارج $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ قانون احتمال و ذلك بإرفاق كل مخرج x_i بعدد حقيقي p_i، موجب أو معدوم، بحيث $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

مثال

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق الممثل في الشكل المقابل



إذا اعتبرنا المخارج الثلاثة R (حمراء)، B (زرقاء) و J (صفراء)، فإنّ هناك عدة خيارات للأعداد p_i التي تحقق الشروط السابقة، لكن النموذج المختار لا يكون مناسبا إلاّ في حالة اقتراب التواترات الإحصائية f_i من الأعداد p_i عندما يكون عدد التجارب أكبر

إنّ الحدس يقودنا إلى النموذج المقابل :

المخرج x_i	R	B	J
الاحتمال p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

قانون تساوي الاحتمال

ليكن $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ قانون الاحتمال على $E = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

نقول أنّ قانون الاحتمال متساوي التوزيع أو (نقول تساوي الاحتمال) إذا كانت كل الأعداد p_i متساوية.

في هذه الحالة، لدينا من أجل كل مخرج i : $p(x_i) = p_i = \frac{1}{n}$

احتمال حادثة

مبرهنة

في حالة تساوي الاحتمال على E يكون لدينا من أجل كل حادثة A:

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

خواص الاحتمالات

نُذكر ببعض الخواص

أجزاء E	لغة الحوادث	الخاصية
A	A حادثة كيفية	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\emptyset$ ، E	الحادثة الأكيدة و المستحيلة	$P(\emptyset) = 0 \qquad P(E) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A و B غير متلائمتين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\bar{A}$	$\bar{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
A ، B	A و B كيفيتان	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

تمرين محلول 1 كيف نستعمل خواص الاحتمالات ؟ ★★☆☆☆

من بين تلاميذ ثانوية 54 % مارس كرة القدم، 32 % مارس كرة اليد و 13 % مارس هاتين الرياضتين معا
نختار تلميذا عشوائيا. ما احتمال أن يكون لم يمارس كرة القدم و لم يُمارس كرة اليد

حل

مجموعة المخارج هي مجموع التلاميذ

ليكن الحدث F " التلميذ مارس كرة القدم " و الحدث H " التلميذ مارس كرة اليد " من المعطيات :

$P(F) = 0{,}54$ ، $P(H) = 0{,}32$ و $P(F \cap H) = 0{,}13$

ليكن الحدث R " التلميذ لم يمارس كرة القدم و لم يُمارس كرة اليد "

الحدث R هو الحدث العكسي لاتحاد الحدثين F و H بمعنى $R = \overline{F \cup H}$

لكن،

$$P(F \cup H) = P(F) + P(H) - P(F \cap H) = 0{,}54 + 0{,}32 - 0{,}13 = 0{,}73$$

إذن

$$P(\overline{F \cup H}) = 1 - P(F \cup H) = 0{,}27$$

و

$$P(R) = 0{,}27$$

المتغيّر العشوائي

مثال

نرمي ثلاث مرات قطعة نقود غير مزيّفة. نربح $2\ DA$ لكل ظهر (F) و نخصر $1\ DA$ لكل وجه (F).

مجموعة المخارج هي $E = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

الدالة $E \mapsto \mathbb{R}$: التي ترفق بكل مخرج الربح الجبري (الموجب أو السالب) المحصل عليه، تأخذ القيم : -3، 0، 3 و 6، و لكل من هذه القيم (مثلا 3) يمكن اعتبار الحادثة $(X = 0) = \{PPF, PFP, FPP\}$ التي نرفق لها احتمالها $\left(\frac{3}{8}\right)$

نحصل على قانون احتمال جديد على المجموعة $' = X(E) = \{-3, 0, 3, 6\}$ ، نسمّيه قانون X

الربح x_i	$x_1 = -3$	$x_2 = 0$	$x_3 = 3$	$x_4 = 6$
الاحتمال $p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تعريف

- متغيّر عشوائي X هو دالة عددية معرّفة على مجموعة المخارج E و مزودة باحتمال
يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ بالاحتمالات $p_1, p_2, \dots, p_n$ المعرفة بـ :
$p_i = P(X = x_i)$
- إرفاق القيم i بالقيم x_i هو تعريف قانون احتمال جديد على $E' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. يُرمز إلى هذا القانون بـ P' أو P_X و يُسمّى قانون X

الأمل، التباين و الانحراف المعياري

تعريف

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ بالاحتمالات $p_1, p_2, \dots, p_n$

- الأمل الرياضي لـ X هو العدد :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- التباين لـ X هو العدد :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2$$

- الانحراف المعياري لـ X هو العدد :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال :

احسب $E(X)$، $V(X)$ و $\sigma(X)$ للمتغيّر العشوائي المعرّف في المثال السابق

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

هو الربح المتوسط.

$$V(X) = \left((-3)^2 \times \frac{1}{8} + 0^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{3}{8} + 6^2 \times \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 6{,}75$$

و :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2{,}60$$

ملاحظة :

بالمقارنة مع مجال الاحصاء فإنّ $E(X)$ هو $\bar{x}$ (الوسط الحسابي) و في ميدان الألعاب هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة، فانعدام $E(X)$ يدل على أنّ اللعبة عادلة و $E(X) > 0$ يعني أنّ اللعبة مربحة و في حالة $E(X) < 0$ فهي ليست في صالح اللاعب.

كذلك كما هو الحال في مجال الاحصاء فإنّ التباين و الانحراف المعياري هما قيمتين لقياس التشتت و في ميدان الألعاب، هذا التشتت يُترجم خطر الربح أو الخسارة الكبيرة

تمرين محلول 2 كيف نُعرف قانون احتمال متغيّر عشوائي ؟ ★★☆☆☆

يسحب لاعب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من صندوق يظم 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء.
سحب 3 كرات حمراء يُؤدي إلى ربح $100\ DA$، سحب كرتين حمراوين و واحدة خضراء يُؤدي إلى ربح $40\ DA$ في الحالات الأخرى يخسر اللاعب $70\ DA$

X المتغيّر العشوائي الذي يُعطي الربح الجبري للاعب.

1. عيّن قانون X
2. احسب الأمل، التباين و الانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X

حل

1. مجموعة المخارج هي مجموعة التوفيقات ذات 3 كرات من بين 10 ، عدد المخارج هو إذن $C_3^{10} = 120$

القيم الممكنة لـ X هي 100، 40 ، -70

$(X = 40)$ هي الحادثة " سحب كرتين حمراوين و كرة خضراء " تشمل على $\frac{2}{5} \times C_5^1 = 50$ مخرجاً

إذن $P(X = 0) = \frac{5}{12}$

$(X = 100)$ تشمل على $C_5^3 = 10$ مخرجاً، إذن $P(X = 100) = \frac{1}{12}$

و بما أنّ مجموع الاحتمالات هو 1 فإنّ $P(X = -70) = \frac{1}{2}$

الجدول التالي يُلخص قانون X

x_i	-70	40	100
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

2. $E(X) =$ ، $V(X) =$ و $\sigma(X) =$

الاحتمالات الشرطية

تعريف

تعريف

لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(A) \neq 0$

نعرّف على E احتمالا جديداً، نرمز له P_A، بوضع، من أجل كل حادثة B :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

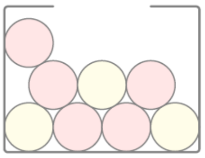
P_A يُسمّى احتمال شرطي علما أنّ A محققة

$P_A(B)$ تقرأ " احتمال B علما أنّ A محققة

تمرين محلول 2 كيف نستعمل الاحتمالات الشرطية ؟ ★☆☆☆☆

نسحب عشوائيا و دون إرجاع كرتين من صندوق به 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء.

ما احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين حمراوين ؟



حل

نسمّي A الحادثة " الكرة الأولى حمراء " و نسمّي B " الكرة الثانية حمراء "

من الواضح أنّ $P(A) = \frac{5}{8}$ و نُريد حساب $P(A \cap B)$، أي $P(A) \times P_A(B)$

لكن $_A(B)$ هو احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الذي لا يحوي إلاّ على 4 كرات حمراء من بين 7

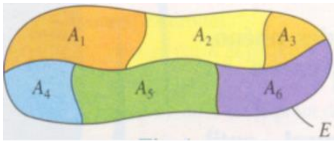
لدينا إذن $_A(\quad) = \frac{4}{7}$ و عليه :

$$P(A\cap B)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$$

◇

دستور الاحتمالات الكلّية

تجزئة مجموعة



الأجزاء $_1$ ، A_2، ... ، A_n تشكل تجزئة للمجموعة E إذا كانت منفصلة مثنى مثنى و اتحادها يساوي المجموعة E (الشكل المقابل)

مبرهنة

لتكن $_1$ ، A_2، ... ، A_n حوادث احتمالاتها غير معدومة ، تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E

لدينا من أجل كل حادثة B:

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$$

مع ، من أجل $1\leq k\leq n$: $P(A_k\cap B)=P(A_k)\times P_{A_k}(B)$

البرهان

هذا الدستور ناتج من التعريف السابق و من أنّ المجموعات $\{A_k\cap B\}$ $(1\leq k\leq n)$ تشكل تجزئة لـ B

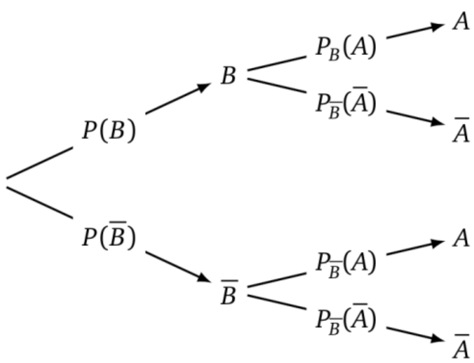
تمرين محلول 2 كيف نحسب الاحتمالات الشرطية باستعمال الشجرة ؟ ★★☆☆☆

نعتبر صندوقين أحدهما $_1$ يحوي 5 كرات خضراء و 3 حمراء و الآخر U_2 يحوي 3 كرات خضراء و 6 كرات حمراء. كل الكرات لا نميّز بينها باللمس.

نرمي حجر نرد مكعب غير مزور ، مرقم من 1 إلى 6. إذا تحصلنا على أحد الرقمين 5 أو 6 نسحب كرة عشوائيا من الصندوق $_1$ و في الحالات الأخرى نسحب كرة من الصندوق U_2

نسمّي A الحادثة " الكرة المسحوبة خضراء "

و نسمّي B الحادثة " نحصل على أحد الرقمين 5 أو 6



1. أحسب $P(B)$ و $P(\bar{B})$
2. أحسب $P_B(A)$ و $P_B(\bar{A})$
3. أحسب $P_{\bar{B}}(A)$ و $P_{\bar{B}}(\bar{A})$
4. أكمل الشجرة بالقيم العددية المحصل عليها
5. استنتج $P(A)$

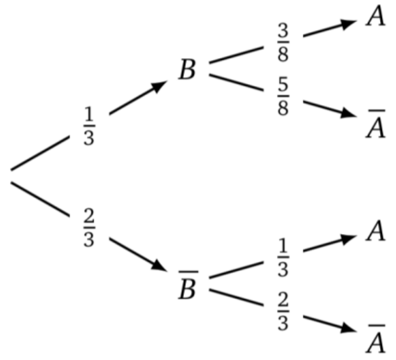
حل

1. النرد غير مزيف (حالة تساوي الاحتمالات). إذن $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

2. $P_B(A)$ هو احتمال A علماً أنّ B محققة. إذا تحققت B فإنّ السحب يتم من الصندوق $_1$ و في هذه الحالة احتمال الحصول على كرة خضراء هو $\frac{5}{8}$. إذن $P_B(A)=\frac{5}{8}$ و $P_B(\bar{A})=1-P_B(A)=\frac{3}{8}$

3. $P_{\bar{B}}(A)$ هو احتمال A علماً أنّ $\overline{}$ محققة. إذا تحققت $\overline{}$ فإنّ السحب يتم من الصندوق $_2$ و في هذه الحالة احتمال الحصول على كرة خضراء هو $\frac{1}{3}$. إذن $P_{\bar{B}}(A)=\frac{1}{3}$ و $P_{\bar{B}}(\bar{A})=1-P_{\bar{B}}(A)=\frac{2}{3}$

4. الشجرة :



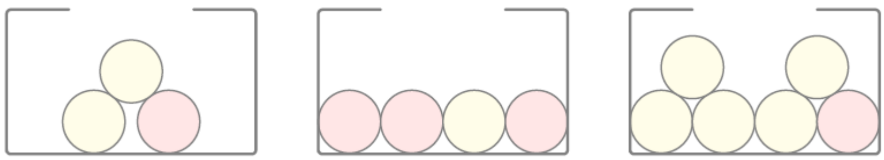
5. $P(A)$ هو مجموع احتمالات المسارات المؤدية للحادثة A. و منه :

$$\begin{aligned}P(R)&=P(B)\times P_B(A)+P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(A)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{31}{72}\end{aligned}$$

◇

تمرين محلول 2 كيف نستعمل دستور الاحتمالات الكلّية ؟ ★★★☆☆

نعتبر ثلاث الصناديق U_1 ، U_2 و U_3 كما هو مبيّن في الشكل التالي



U_1: 1 حمراء، 5 صفراء **U_2: 3 حمراء، 1 صفراء** **U_3: 1 حمراء، 2 صفراء**

نختار عشوائيا صندوقا و نسحب منه كرة واحدة.

ما احتمال أن تكون الكرة مسحوبة حمراء ؟

حل

مجموعة المخارج E هي مجموعة كرات الصناديق الثلاثة

لتكن الحادثة $_1$ " الصندوق المختار هو U_1 " ، بنفس الكيفية نُعرف كذلك الحادثتين U_2 و U_3

و لتكن R و J بهذا الترتيب هما الحادثتين " الكرة المسحوبة حمراء " و " الكرة المسحوبة صفراء "

المطلوب حساب $P(R)$. لكن، U_1، U_2 و U_3 تشكل تجزئة للمجموعة E.

حسب دستور الاحتمالات الكلّية :

$$P(R) = P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap R) + P(U_3 \cap R)$$

لنحسب هذه الاحتمالات الثلاثة ، من الواضح (حالة تساوي الاحتمال) أنّ :

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

من جهة أخرى، $P_{\ _1}(R) = \frac{1}{6}$ (هو احتمال سحب كرة حمراء من U_1)

كذلك $P_{U_2}(R) = \frac{3}{4}$ و $P_{U_3}(R) = \frac{1}{3}$

نستنتج أنّ :

$$P(U_1 \cap R) = P(U_1) \times P_{U_1}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

و بكيفية مماثلة :

$$P(U_2 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(U_3 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

و منه :

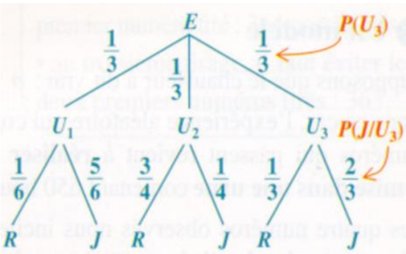
$$P(R) = \frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

أي :

$$P(R) = \frac{5}{12}$$

تعليق

يمكن تشكيل شجرة الاحتمالات التالية الموافقة لعملية السحب



القاعدة 1 : احتمال مسار هو جداء الاحتمالات الموجودة على كل فرع من هذا المسار.

إذن $P(U_1 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$

(ما يُترجم المساواة $P(U_1 \cap R) = P(U_1) \times P_{U_1}(R)$)

القاعدة 2 : احتمال حادثة هو مجموع احتمالات المسارات المؤدية لهذه الحادثة

و عليه :

$$P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

◇

الحوادث المستقلة و المتغيّرات العشوائية المستقلة

الحوادث المستقلة

تعريف

نقول عن حادثتين A و B أنّهما مستقلان إذا كان :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

بمعنى أنّه إذا كان $P(A) \neq 0$ فإنّ $P(B) = {}_A(\quad)$

المتغيرات العشوائية المستقلة

تعريف

X و Y متغيّران عشوائيان معرفان على نفس المجموعة E

X يأخذ القيم x_1، x_2، ... ، x_n و Y يأخذ القيم y_1، y_2، ... ، y_n

نقول أنّ X و Y مستقلان عندما يكون، من أجل كل i و j ($1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$) الحادثتان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلتان

تمرين محلول 2 كيف نُثبت استقلالية حادثتين ؟ ★★★☆☆

كيس يحتوي على 10 كرات : منها 5 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 5 ، ثلاث كرات بيضاء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين مرقمتين من 9 إلى 10. نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين.

نعتبر الحوادث : A " الكرتين المسحوبتين من نفس اللون" و B " الكرتين المسحوبتين تحملان أرقام فردية "

هل A و B مستقلتان ؟

حل

مجموعة الامكانيات هي التوفيقات ذات كرتين من بين 10. عدد النتائج الممكنة هي $_{10}^{2} = 45$

نُريد مقارنة $P(A \cap B)$ مع $P(A) \times P(B)$

- تتحقق الحادثة A في حالة سحب كرتين حمراوين أو بيضاوين أو خضراوين و منه :

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} = \frac{14}{45}$$

- تتحقق الحادثة في حالة سحب كرتين تحملان رقمين فرديين من بين 5 أرقام فردية و منه :

$$P(B) = \frac{C_5^2}{45} = \frac{2}{9}$$

ثمّ: $P(A) \times P(B) = \frac{28}{405}$

- تتحقق الحادثة $A \cap B$ بسحب كرتين من نفس اللون و تحملان رقمين فرديين، و يكون ذللك إلاّ بسحب كرتين من بين الحمراء التي تحمل رقما فرديا ، إذن :

$$P(A \cap B) = \frac{C_3^2}{45} = \frac{1}{15}$$

النتيجة : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ إذن A و B غير مستقلتين