

بدأ الاهتمام بالظواهر العشوائية منذ حوالي أربعة قرون، عندما كتب باسكال (Pascal) إلى فيرما (Fermat) يسأله عن رأيه في مسائل تتعلق بألعاب المصادفة: في لعبة رمي حجر النرد ثماني مرات أراد أحد الحضور أن يجرب حظه، و بعد أن رمى النرد ثلاث مرات و كانت نتائجه كلها خاسرة امسح اللاعب من اللعبة. فبكم يجب أن نغرّم هذا اللاعب ؟ كانت نتيجة هذه المراسلات بداية فرع رياضياتي جديد مهم هو نظرية الاحتمالات. كان كاردان (Cardan) قد درس موضوع الاحتمالات قبل قرن من مراسلات باسكال و فيرما، و نشر هويغنز (Huygens) في عام 1657 بحثاً صغيراً يحمل اسم (حول التفكير في ألعاب النرد) و كان دافعه هو المراسلات التي أشرنا إليهما .



أصبحت نظرية الاحتمالات، بدءاً من عام 1933 على يد كلموغورف (Kolmogorov) الذي أسس هذا الحساب نظرية رياضياتية أعطت نتائج مؤكدة عن تلك الظواهر العشوائية.

في هذا المحور

6

◀ العد (القوائم، الترتيبات، التوفيقات)

◀ المفاهيم الأساسية للاحتتمالات

◀ المتغير العشوائي

◀ الاحتمالات الشرطية

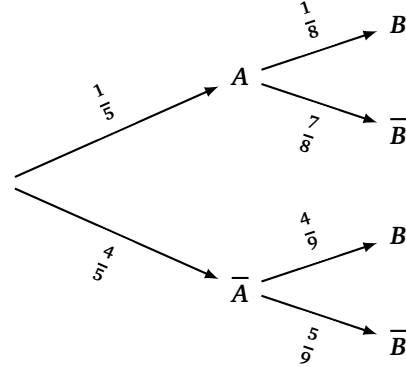
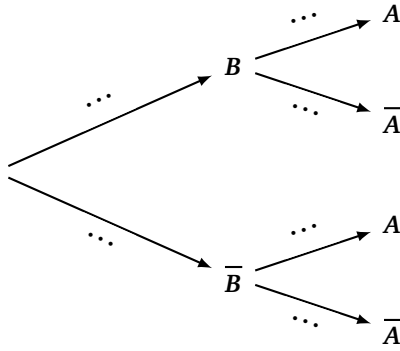
◀ الحوادث المستقلة و المتغيرات العشوائية المستقلة

◀ تمارين و مسائل للتعلم



الأسئلة مستقلة عن بعضها البعض

1. E و F حدثين حيث $P(E) = 0,4$ و $P_E(F) = 0,9$. أحسب $P(E \cap \bar{F})$
2. E و F حدثين حيث $P(E) = 0,4$ ، $P_F(E) = 0,2$ و $P(E \cup F) = 0,8$. أحسب $P(E \cap F)$
3. E و F حدثين حيث $P(E) = 0,4$ ، $P(F) = 0,16$ و $P(E \cap \bar{F}) = 0,3$. أحسب $P_E(\bar{F})$
4. باستعمال الشجرة الأولى أكمل الثانية



1. نعتبر صندوق U_1 يحتوي على 3 كرات حمراء و 7 كرات سوداء لا نميّز بينها في اللمس نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من هذا الصندوق
 - (أ) احسب p_1 احتمال أن تكون الكرتان حمراوين ؟
 - (ب) احسب p_2 احتمال أن تكون الكرتان سوداوين ؟
 - (ج) احسب p_3 احتمال أن تكون الكرتان مختلفتين في اللون ؟
 - (د) احسب p_4 احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون ؟
2. نعتبر الآن صندوق ثان U_2 يشمل 4 كرات حمراء و 6 كرات سوداء.
 - نسحب في آن واحد كرتين من U_1 و كرة من U_2 و نعتبر الحوادث التالية :
 - R : " الكرات المسحوبة حمراء "
 - D : " الكرات الثلاثة المسحوبة ليست كلّها من نفس اللون "
 - B : " الكرة المسحوبة من U_2 حمراء "
 - (أ) احسب $P(R)$ احتمال الحادثة R
 - (ب) ما احتمال سحب 3 كرات من نفس اللون
 - (ج) احسب $P_D(B)$ احتمال الحادثة B علما أنّ الحادثة D محققة

التمرين 41



- رقمت أوجه نرد مزيف من 1 إلى 6 حيث أنه عند رمي هذا النرد نفترض أن احتمال ظهور وجه يحمل رقما زوجياً هو ضعف احتمال ظهور وجه يحمل رقما فردياً .
 (أ) أحسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما فردياً .
 (ب) أحسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما زوجياً .
- نعتبر اللعبة التالية : يرمي اللاعب هذا النرد مرة واحدة، يربح 10 نقاط إذا ظهر الوجه الذي يحمل الرقم 6، يربح 5 نقاط إذا ظهر الوجه الذي يحمل الرقم 3 أما إذا ظهر وجه آخر غير هذين الوجهين فإنه يخسر 5 نقاط .
 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد النقاط المحصل عليها .
 1. عين قانون الإحتمال لهذه اللعبة .
 2. أحسب الأمل الرياضياتي ، التباين . إستنتج إذا كانت هذه اللعبة عادلة .

التمرين 42



في هذا القسم (⊙) ثلاث أرباع من المترشحين يعملون بجد خلال السنة الدراسية، احتمال نجاح مترشح من هذا القسم هو 0,9 إذا عمل بجد، و إذا لم يعمل بجد فاحتمال نجاحه هو 0,2 ، نقول أنّ المترشح مندهش إذا كان ناجحاً ولم يعمل بجد أو راسب لكنّه عمل بجد .

نعتبر الحوادث :

T : " التلميذ عمل بجد "

A : " التلميذ ناجح "

S : " التلميذ مندهش "

نختار عشوائياً تلميذا واحداً

1. أنقل و أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة

2. أحسب الاحتمالات التالية : $P(T \cap A)$ ، $P(T \cap \bar{A})$ ، $P(\bar{T} \cap \bar{A})$ ،

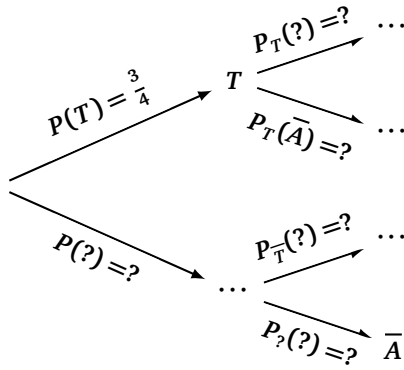
$P(\bar{T} \cap A)$

3. ما احتمال أن يكون المترشح ناجحاً ؟

4. إذا علمت أنّ المترشح المختار ناجحاً، ما احتمال أن يكون عمل

بجد خلال السنة الدراسية

5. بيّن أنّ احتمال S هو $P(S) = 0,125$





نعتبر قطعتي النقود A و B

A متوازنة

B غير متوازنة حيث احتمال الحصول على الظهر (P) هو $P(P) = \frac{1}{4}$ و احتمال الحصول على الوجه (F) هو

$$P(F) = \frac{3}{4}$$

نقوم بعملية الرمي على النحو التالي :

نختار عشوائياً إحدى القطعتين و نرميها مرّة واحدة، إذا تحصلنا على الظهر (P) نحتفظ بنفس القطعة و نقوم برميها

مرة أخرى أمّا إذا تحصلنا على الوجه (F) نُغيّر القطعة و نقوم برميها مرّة واحدة

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع :

A_n : الرمية n تكون مع القطعة A و a_n : احتمال الحادثة A_n أي $a_n = P(A_n)$

1. بمساعدة شجرة الاحتمالات المناسبة عيّن قيمتي الاحتمالين a_1 و a_2

2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$

3. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $u_n = a_n - \frac{3}{5}$

(أ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول

(ب) أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج a_n بدلالة n

(ج) عيّن النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، كيف تفسر هذه النتيجة ؟



نخضع كل قطع الغيار التي ينتجها مصنع لاختبارين في النوعية T_1 و T_2

95% من هذه القطع تنجح في الاختبار T_1 ، 99% من القطع التي نجحت في الاختبار T_1 نجحت أيضا في الاختبار

T_2 ، بينما نجد أنّ 98% من القطع التي لم تنجح في الاختبار T_1 نجحت في الاختبار T_2 .

نختار عشوائياً قطعة غيار كيفية من إنتاج هذا المصنع و نعرّف الحادثتين :

T_1 : " قطعة الغيار تنجح في الاختبار T_1 "

T_2 : " قطعة الغيار تنجح في الاختبار T_2 "

1. احسب احتمال الحادثة S : " قطعة الغيار تنجح في الاختبارين T_1 و T_2 "

2. احسب احتمال أن تنجح قطعة الغيار في الاختبار T_2

3. هل الحادثتان T_1 و T_2 مستقلتان ؟

4. نختار قطعة غيار من القطع التي نجحت في الاختبار T_2 ، ما احتمال أنّها نجحت في الاختبار T_1 ؟



نسحب عشوائيا كرة من صندوق يظم كرات حمراء و أخرى سوداء مرقمة إمّا بالرقم 0 و إمّا بالرقم 1 الصندوق يظم 40% من الكرات الحمراء.

من بين الكرات الحمراء، 75% تحمل الرقم 1. و 25% من الكرات هي سوداء و تحمل الرقم 1 نعتبر الحادثتين : A " الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 " و R : " الكرة المسحوبة حمراء "

1. شكل شجرة الاحتمالات التي تتمذج هذه الوضعية

2. ما احتمال سحب كرة تحمل الرقم 1 ؟



الجزء الأول يحتوي صندوق على n كرة بيضاء (n عدد طبيعي) و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء.

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من هذا الصندوق

1. ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2. نرمز بالرمز $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.

$$(a) \text{ أثبت أن : } P(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$$

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$ ، فسّر النتيجة

الجزء الثاني نعتبر في هذا الجزء $n = 4$

1. احسب $P(4)$

2. نسمي سحبا كل سحب عشوائي لكرتين في آن واحد من هذا الصندوق.

يقوم اللاعب بانجاز سحبين مستقلين عن بعضهما بحيث يعيد إلى الصندوق الكرتين المسحوبتين منه في السحب الأول.

مقابل إجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مقدما مبلغ قدره 30 DA و من أجل كل سحب يتحصل على 40 DA إن كانت الكرتان من نفس اللون، و يتحصل على 5 DA فقط إن كانتا من لونين مختلفين.

نسمي ربحا لهذا اللاعب الفارق بين مجموع ما يتحصل عليه من السحبين و المبلغ الذي دفعه مقدما (يمكن أن يكون الربح موجبا أو سالبا)

نُعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبين مستقلين ربح هذا اللاعب

(a) ما هي القيم الممكنة للمتغير X ؟

(ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير X

(ج) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X



صندوقان متماثلان فيهما كرات لا نفرق بينهما في اللمس.

الصندوق U_1 يحتوي كرات مرقمة بالأعداد 1 ، 2 ، 4 ،

الصندوق U_2 يحتوي كرات مرقمة بالأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ،

1. نختار عشوائياً أحد الصندوقين و نسحب منه كرتين معا، احسب احتمال أن يكون مجموع رقمي الكرتين زوجياً

2. نختار عشوائياً أحد الصندوقين و نسحب منه كرتين في آن واحد، فإذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين فردي،

احسب احتمال أن تكون الكرتان قد سحبتا من الصندوق U_2

3. نسحب عشوائياً كرتين من الصندوق U_1 ، و نسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_2

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوقين،

(أ) اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X

(ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

(ج) احسب الأمل الرياضي، التباين و الانحراف المعياري للمتغير X



نعتبر ثلاث صناديق U_1 ، U_2 و U_3

يحتوي الصندوق U_1 على كرتين سوداوين و 3 كرات حمراء، يحتوي الصندوق U_2 على كرة سوداء و 4 كرات حمراء و

يحتوي الصندوق U_3 على 3 كرات سوداء و 4 كرات حمراء.

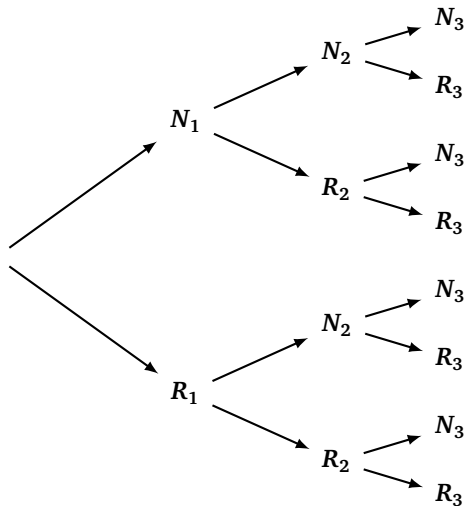
نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائياً كرة من U_1 و كرة من U_2 ، نضعهما في U_3 ثمّ نسحب عشوائياً كرة من U_3

من أجل i الذي يأخذ القيم 1 ، 2 و 3 ، نعتبر الحوادث :

" N_i : نسحب كرة سوداء من الصندوق U_i "

" R_i : نسحب كرة حمراء من الصندوق U_i "

1. أنقل و أكمل شجرة الاحتمالات التالية :



2. (أ) احسب احتمال كل من الحادثتين $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ و $N_1 \cap R_2 \cap N_3$

(ب) استنتج احتمال الحادثة $N_1 \cap N_3$

(ج) احسب بكيفية مماثلة احتمال الحادثة $R_1 \cap N_3$

3. استنتج احتمال الحادثة N_3

4. هل الحادثتين N_3 و N_1 مستقلتان ؟

5. علما أن الكرة المسحوبة من U_3 سوداء، ما احتمال أن تكون الكرة

المسحوبة من U_1 حمراء



صندوق يحوي 5 كرات منها كرتان سوداوان و 3 كرات بيضاء غير متماثلة الملمس

1. نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من هذا الصندوق

(أ) احسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

E : " الحصول على كرتين سوداوين "

F : " الحصول على كرتين من نفس اللون "

(ب) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء المحصل عليها .

عيّن قانون X و احسب الأمل و الانحراف المعياري لـ X

2. نسحب على التوالي كرتين من الصندوق على النحو التالي : نسحب الكرة الأولى، نُسجل لونها و نُعيدها إلى

الصندوق مع إضافة له كرة أخرى من نفس لون الكرة المسحوبة، ثمّ نسحب كرة ثانية من الصندوق .

نعتبر الحدثين :

N_1 : " الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى "

N_2 : " الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية "

B_1 : " الحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى "

(أ) احسب $P_{N_1}(N_2)$ ثمّ $P_{B_1}(N_2)$

(ب) استنتج $P(N_2)$



صندوق يحوي 6 كرات حمراء و n كرة بيضاء .

نعتبر اللعبة التالية : نسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع كرتين من هذا الصندوق،

إذا كانت الكرتان من نفس اللون، يربح اللاعب 1DA و يخسر 1DA في حالة سحب كرتين من لونين مختلفين

1. في هذا السؤال نفرض $n = 3$. احسب احتمال الحصول على :

(أ) كرتين من نفس اللون

(ب) كرتين من لونين مختلفين

2. في هذا السؤال، n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة الربح الجبري المحصل عليه

(أ) اكتب بدلالة n احتمال كل من الحدثين $(X = -1)$ و $(X = 1)$

(ب) استنتج قانون X و احسب أمله الرياضياتي

(ج) عيّن قيم n حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب

التمرين 51



- يحتوي صندوق n كرة حمراء و p كرة زرقاء. نسحب كرة من هذا الصندوق ثم نُعيدها :
- إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء، نُضاعف عدد الكرات الحمراء في الصندوق
 - إذا كانت الكرة المسحوبة زرقاء نُضاعف عدد الكرات الزرقاء في الصندوق
- ثم نُجري مرة ثانية سحب كرة من الصندوق. عيّن القيم الممكنة لـ n و p مع المعطيات التالية
- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً حمراء علماً أن الكرة المسحوبة أولاً حمراء هو $\frac{16}{33}$
 - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً زرقاء علماً أن الكرة المسحوبة أولاً زرقاء هو $\frac{17}{21}$

التمرين 52



- صندوق A يحتوي على كرة حمراء و 3 كرات خضراء. صندوق B يحتوي كرتين حمراوين و كرتين سوداوين. الكرات كلها لا تميّز بينها باللمس
1. لدينا نرد مكعب غير مزيّف وجوهه مرقمة من 1 إلى 6. نرمي هذا النرد مرة واحدة ، إذا حصلنا على مضاعف لـ 3، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق A ، في الحالات الأخرى نسحب عشوائياً كرة من الصندوق B
 - (أ) احسب احتمال سحب كرة سوداء
 - (ب) ما هو اللون الذي له الاحتمال الأكبر للظهور ؟
 - (ج) ما احتمال أن تكون الكرة قد سُحبت من الصندوق B علماً أنّها حمراء ؟
 2. نقوم بظم كل الكرات في صندوق واحد ثم نسحب 3 كرات على التوالي و دون إرجاع
 - (أ) أثبت أنّ احتمال الحادثة " الكرة المسحوبة الثالثة هي سوداء " يساوي $\frac{1}{4}$
 - (ب) احسب احتمال كل من الحادثتين " الكرة المسحوبة الأولى سوداء " و " الكرة المسحوبة الثالثة سوداء "

التمرين 53



- نعتبر نرد مكعب و غير مزيّف، وُجوهه مرقمة من 1 إلى 6 و ثلاث صناديق U_1 ، U_2 و U_3 يحتوي كل منها على k كرة، حيث k عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3
- يوجد 3 كرات سوداء في الصندوق U_1 ، كرتين سوداوين في الصندوق U_2 و كرة واحدة سوداء في الصندوق U_3 و كل الكرات الأخرى الموجودة في الصناديق هي بيضاء
- جميع الكرات متماثلة باللمس
- نعتبر اللعبة التالية : يُلقى اللاعب النرد،
- إذا تحصل على الرقم 1 ، يسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_1 ، يُسجل لونها و يُعيدها إلى الصندوق U_1
 - إذا تحصل على مضاعف لـ 3، يسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_2 ، يُسجل لونها و يُعيدها إلى الصندوق U_2
 - إذا لم يتحصل على الرقم 1 و لم يتحصل على مضاعف لـ 3 ، يسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_3 ، يُسجل لونها

و يُعيدها إلى الصندوق U_3

نعتبر الحوادث A ، B ، C و N التالية :

A - " الحصول على الرقم 1 من رمية النرد "

B - " الحصول على مضاعف لـ 3 من رمية النرد "

C - " الحصول على رقم يختلف عن 1 و ليس مضاعف لـ 3 من رمية النرد "

N - " الكرة المسحوبة سوداء "

1. أثبت أن احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{5}{3k}$
2. ما احتمال الحصول على الرقم 1 من رمية النرد علما أن الكرة المسحوبة هي حمراء
3. عيّن k حتى يكون احتمال سحب كرة حمراء يكون أكبر من $\frac{1}{2}$
4. عيّن k حتى يكون احتمال سحب كرة حمراء يكون مساويا $\frac{1}{30}$

التمرين 54



نعتبر الصندوقين :

U_1 يحوي 5 كرات سوداء مرقمة 0 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4 كرات حمراء مرقمة 0 ، 0 ، 1 ، 3

U_2 يحوي 3 كرات حمراء مرقمة 0 ، 1 ، 1 و 5 كرات صفراء مرقمة 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 و كرتين سوداوين مرقمتين 0 ، 3

الجزء الأول : نسحب من الصندوق U_1 كرتين على التوالي دون إرجاع و المطلوب

1. ما احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 3
2. ما احتمال الحصول على كرتين حمراوين مجموع رقميهما يساوي 3
3. إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين سوداوين ما احتمال أن يكون مجموع رقميهما يساوي 3
4. إذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3 ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان سوداوين
5. إذا علمت أن الكرة المسحوبة الأولى حمراء ما احتمال أن تكون الثانية حمراء
6. إذا علمت أن الكرة المسحوبة الثانية تحمل رقما زوجيا ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الأولى تحمل رقما زوجيا
7. ما احتمال سحب كرة فقط تحمل الرقم 2

الجزء الثاني : نسحب من الصندوق U_2 كرتين على التوالي مع الإرجاع المطلوب

1. ما احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1
2. ما احتمال الحصول على كرتين تحملان الرقم نفسة
3. ما احتمال أن يكون مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين عددا فرديا
4. إذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين عددا زوجيا فما احتمال أن يكون رقما الكرتين مختلفتين
5. إذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر من أو يساوي 3 ما احتمال أن يكون مجموعهما هو 3

الجزء الثالث : نسحب من الصندوق U_2 ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع و المطلوب

1. ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة صفراء
2. ما احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل
3. ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة مختلفة الألوان
4. ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة ليست جميعها من ألوان مختلفة
5. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء و الثانية سوداء و الثالثة صفراء
6. إذا علمت أن الكرات المسحوبة كانت من ألوان مختلفة ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية سوداء
7. إذا علمت أن الكرات المسحوبة من لون واحد ما احتمال أن تكون من اللون الأحمر

الجزء الرابع : نختار أحد الصندوقين عشوائياً و نسحب منه كرة و المطلوب

1. ما احتمال أن يكون رقم الكرة المسحوبة زوجياً
2. إذا كان رقم الكرة المسحوبة زوجياً ما احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_1
3. إذا علمت أن الكرة المسحوبة حمراء ما احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_2

الجزء الخامس : نسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_1 و كرة من الصندوق U_2

نعتبر الحدثين :

A : " إحدى الكرات على الأقل تحمل الرقم 3 "

B : " مجموع رقمي الكرتين يساوي 3 " و المطلوب

1. هل الحدثان A و B مستقلان، و لماذا ؟
2. احسب كلا مما يلي : $P(\bar{A})$ ، $P(B)$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ ، $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ، $P_B(A)$ ، $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ ،
3. احسب احتمال وقوع أحد الحدثين A أو B فقط

الجزء السادس : نسحب كرة من الصندوق U_1 و نضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب كرة من الصندوق U_2

1. ما احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من لون واحد
2. إذا علمت أن الكرة المسحوبة من الصندوق U_1 حمراء ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U_2 سوداء
3. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U_2 حمراء
4. ما احتمال أن تكون الكرتان من لونين مختلفين