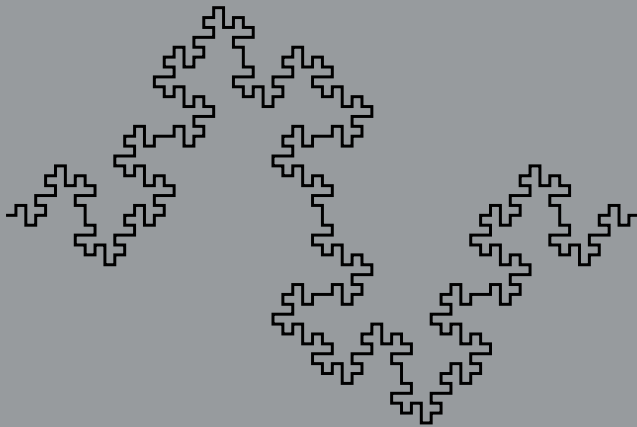


نهائي علوم و رياضيات

2008 - 2017

حوليات المتتاليات

كمال حامدي



حوليات البكالوريا

علوم - تقني رياضي - رياضيات

المتتاليات

حامدي كمال

آخر تحديث : 24 جانفي 2018

1 شعبة علوم

تمرين 1

علوم - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الأول (4 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. احسب الحدّين u_1 و v_1

2. (ا) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

(ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما

3. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $w_n = u_n - v_n$

برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول w_0 ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n

4. بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

تمرين 2

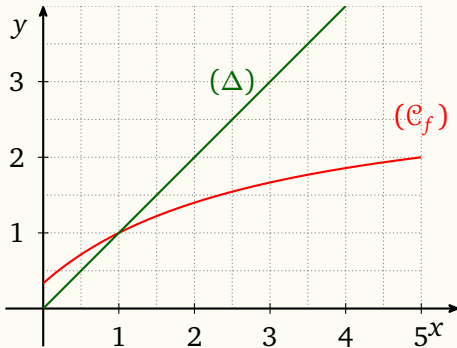
علوم - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (\mathcal{C}_f) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = a$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$



1. عيّن قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$

2. (ا) انقل الشكل المقابل ثمّ ممثّل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

(دون حساب الحدود)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(ا) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول

(ب) عبّر بدلالة n عن u_n و v_n ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. احسب بلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$
ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

تمرين 3

علوم - 2017 - الموضوع الأول (4 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$$

1. (أ) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

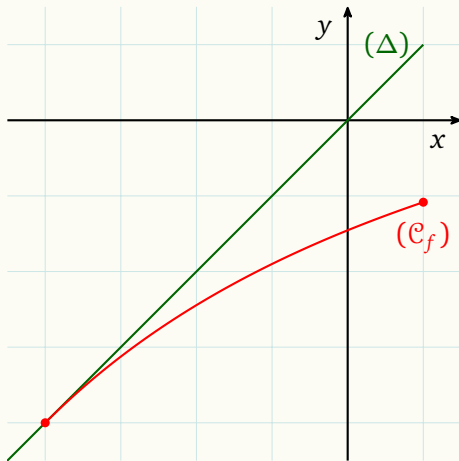
(ب) بين أن المتتالية (u_n) متزيدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

2. (أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n

(ب) أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 4

علوم - 2017 - الموضوع الثاني (4 نقاط)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 f هي الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

الجزء الأول تحقّق أنّ الدالة f متزيدة تماما على المجال $[-4; 1]$ ثمّ بين أنّ :

من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإنّ $f(x) \in [-4; 1]$

الجزء الثاني (u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. انقل الشكل المقابل ثمّ مثلّ على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$

ثمّ بين أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ ، أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم احسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$

تمارين 5

علوم - 2016 - الموضوع الأول (5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1. (أ) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بحدها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

3. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

4. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0

(ب) اكتب v_n بدلالة n

(ج) استنتج أن : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمارين 6

علوم - 2016 - الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ب :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$$

1. بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول v_0

2. (أ) عبّر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. (أ) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(ب) تحقق أن : $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n

(ج) استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$

تمرين 7

علوم - 2015 - الموضوع الأول (4,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1. احسب u_1 ، u_2 ، و u_3

2. أثبت أنه م أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

3. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة ؟ علّل

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

(ب) اكبت v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2 + \ln 3)$

تمرين 8

علوم - 2015 - الموضوع الثاني (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجزء الأول f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (\mathcal{C}_f) تمثيلها البياني

1. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

2. ادرس وضعية (\mathcal{C}_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$

3. مثل (\mathcal{C}_f) و (D) على المجال $[0; 6]$

الجزء الثاني نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على \mathbb{N} كما يلي

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. (أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$ دون حسابها

(ب) خمن اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

2. (أ) أثبت أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(ب) استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

3. (أ) أثبت أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

(ب) بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(ج) استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n)

تمرين 9

علوم - 2014 - الموضوع الأول (4 نقاط)

لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ ،

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$ ،

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول

2. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n

3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على \mathbb{N}

4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

5. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $w_n = 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$

(أ) بيّن أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على \mathbb{N}

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$

تمرين 10

علوم - 2014 - الموضوع الثاني (4 نقاط)

الجزء الأول نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بحدّها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

(العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1. بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول

2. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

الجزء الثاني نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ (\ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

1. عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

2. (أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$

(ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

تمرين 11

علوم - 2013 - الموضوع الأول (4,5 نقاط)

الجزء الأول المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول

2. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

الجزء الثاني المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$

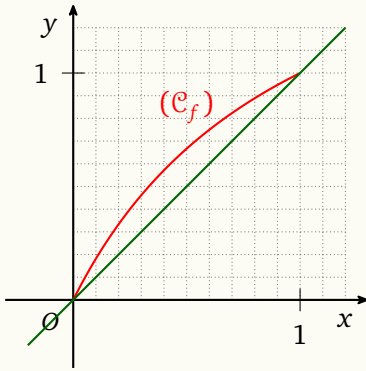
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. (ا) برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

(ب) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq (6 - u_n) \leq v_n$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 12

علوم - 2013 - الموضوع الثاني (4 نقاط)



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; 1]$

بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ، و (d) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1. المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحدها الأول ، $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد

طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على

محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2. (ا) أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 1]$

(ب) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

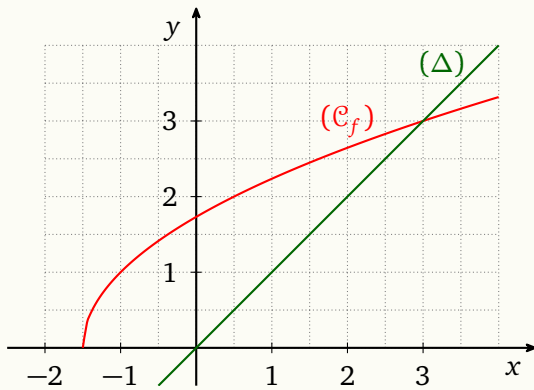
(ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0

(ب) احسب نهاية (u_n)

تمرين 13

علوم - 2012 - الموضوع الأول (5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$



1. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$ كما يلي :

$h(x) = \sqrt{2x+3}$ ، (C_f) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس. (انظر الشكل المقابل)

(ا) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، و u_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الانشاء)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_n < 3$

3. (ا) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 14

علوم - 2012 - الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n : 3 < u_n < 4$

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما

3. برّر لماذا (u_n) متقاربة ؟

4. (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \ln(u_n - 3)$

(ا) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول

(ب) اكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

تمرين 15

علوم - 2011 - الموضوع الأول (3 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل
1. المتتالية (v_n) :

(أ) حسابية (ب) هندسية (ج) لا حسابية ولا هندسية

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

(أ) $+\infty$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2}(1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3})$

(أ) $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ (ب) $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ (ج) $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

تمرين 16

علوم - 2011 - الموضوع الثاني (4 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} ب : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1. (أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α

(ب) اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثمّ استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n

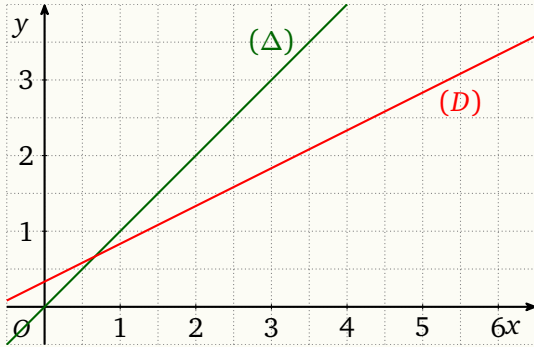
(ج) عيّن قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها (u_n) متقاربة

2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين 17

علوم - 2010 - الموضوع الثاني (5 نقاط)



في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين

$$(\Delta) \text{ و } (D) \text{ معادلتيهما على الترتيب : } y = x \text{ و } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N}

$$u_0 = 6 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

(أ) انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

(ب) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

(ج) أعد تخمينًا حول اتجاه تغيّر المتتالية u_n

2. (أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > \frac{2}{3}$

(ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

(أ) بيّن أنّ المتتالي (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول

(ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و استنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين 18

علوم - 2009 - الموضوع الأول (3,5 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية معرفّة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } u_0 = 1 \text{ و } u_1 = 2 \text{ و } u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

$$\text{المتتالية } (v_n) \text{ معرفّة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. احسب v_0 و v_1

2. برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

3. (أ) احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$\text{(ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$$

(ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

تمرين 19

علوم - 2009 - الموضوع الثاني (5 نقاط)

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} : \text{ حيث } q \text{ أساسها و } u_1 \text{ حدّها الأول}$$

1. (أ) احسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1

(ب) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(ج) احسب S_n حيث $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

2. (v_n) متتالية عددية معرفّة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

(أ) احسب v_2 و v_3

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(ج) اكتب w_n بدلالة n ثمّ استنتج v_n بدلالة n

تمرين 20

علوم - 2008 - الموضوع الأول (4 نقاط)

1. نعتبر الدالة f المعرفّة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+2}$

(أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على I

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ تنتمي إلى I

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفّة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

- (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I
- (ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة
3. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$
- (ب) عيّن النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 21

علوم - 2008 - الموضوع الثاني (5 نقاط)

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2, n, \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, u_0 = \frac{5}{2}$$

1. (ا) ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2 \text{ على } \mathbb{R} \text{ بـ :}$$

- (ب) باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4

- (ج) ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$

- (ب) تحقق أن (u_n) متزايدة

- (ج) هل (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 6$

- (ا) أثبت أن المتتالية v_n هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول

- (ب) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2 شعبة تقني رياضي

تمرين 22

تقني رياضي - 2017 - الدورة الاستثنائية الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{a}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an}u_n$

حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2

1. (أ) بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n > 0$

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an}u_n$

(أ) أثبت أن المتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ و عيّن حدّها الأول v_1 بدلالة a

(ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n$

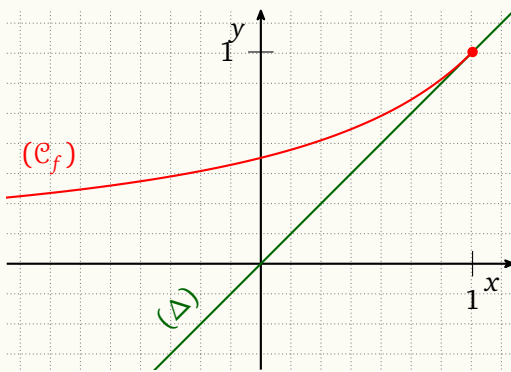
ثم عيّن قيمة a حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

تمرين 23

تقني رياضي - 2017 - الموضوع الأول (7 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$



(C_f) هو تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و

المتجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{0})$ ، و ليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

(u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزما خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا

حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$

3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

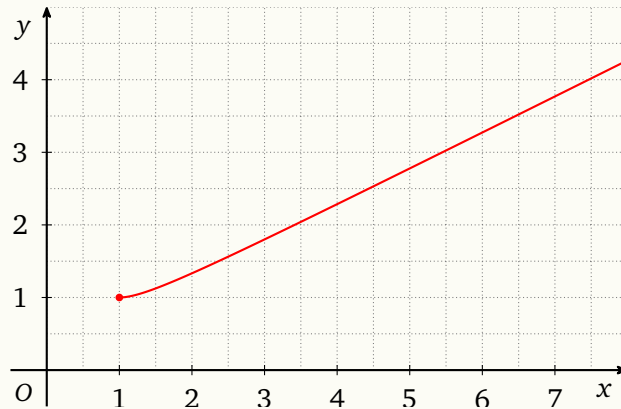
(أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثم عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمارين 24

تقني رياضي - 2016 - الموضوع الثاني (5 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ، (الشكل التالي) (\mathcal{C}_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،



1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$

2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) انقل المنحني المقابل ثمّ مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل موضعا خطوط الإنشاء

(ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

(ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

(د) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(هـ) برّر تقارب المتتالية (u_n)

3. نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على \mathbb{N} بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

(أ) برهن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدّها الأول

(ب) اكتب w_n بدلالة n ثمّ v_n بدلالة n

(ج) بيّن أنّ : $u_n = \frac{1}{1 - (\frac{5}{6})^{2^n}}$ ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. احسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \dots + \frac{1}{w_n}$

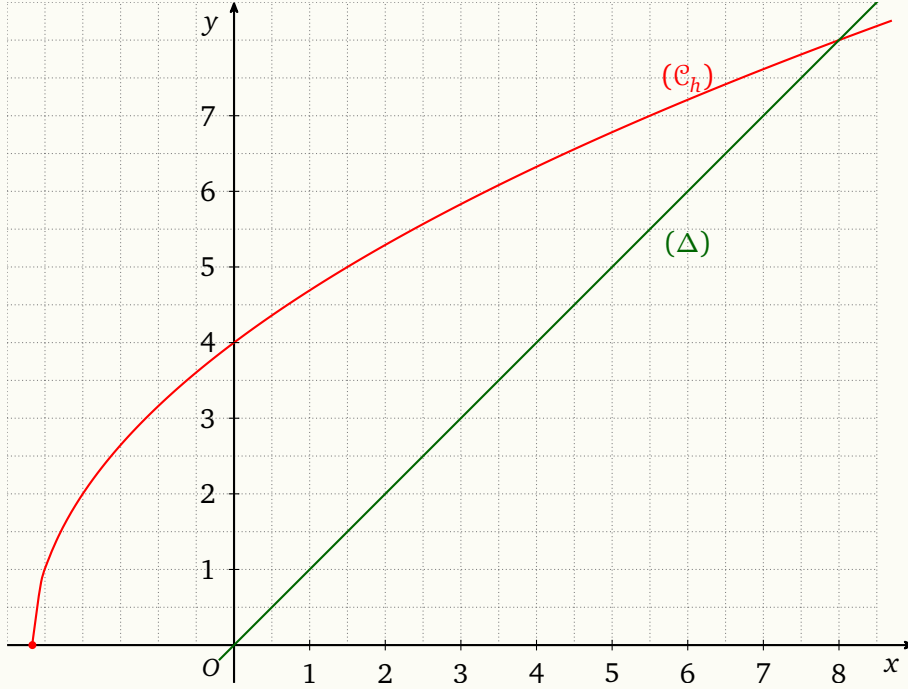
تمرين 25

تقني رياضي - 2015 - الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

1. الدالة المعرفة على المجال $]-\frac{8}{3}; +\infty[$ بما يلي : $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل التالي)



(أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها و موضحا

خطوط الإنشاء)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها

2. (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 8$

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$$

(ج) استنتج اتجاه تغيّر (u_n)

3. (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 26

تقني رياضي - 2014 - الموضوع الأول (4 نقاط)

الجزء الأول f هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x-1)$

1. حدّد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$

2. (ا) عيّن اتجاه تغيّر f

(ب) بيّن أنّه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإنّ $f(x) \in [2; e+1]$

الجزء الثاني (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = e+1$ و من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_n \in [2; e+1]$

2. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. برّر تقارب المتتالية (u_n) ، ثمّ احسب نهايتها

تمرين 27

تقني رياضي - 2014 - الموضوع الثاني (5 نقاط)

n و p عددان طبيعيين

1. ادرس، حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n

2. نضع : $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

(ا) بيّن أنّه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي ، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$

(ب) عيّن n من أجل $p = 6$

3. f هي الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 5^{4x+2} - 9$

ادرس تغيّرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$

4. (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16}$

(ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{4n+2} - 9}{16}$

(ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ u_n عدد طبيعي

5. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

تمرين 28

تقني رياضي - 2013 - الموضوع الأول (4 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على n كما يلي : $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$

1. بين أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول

2. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

3. احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

4. احسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

تمرين 29

تقني رياضي - 2011 - الموضوع الأول (5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي :

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثمّ استنتج أنّ : $u_n > 1$

2. ادرس اتجاه تغيّر (u_n) ثمّ بين أنّها متقاربة ، احسب نهاية (u_n)

3. ليكن الجداء p_n المعرفة كما يلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

4. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $v_n = \ln u_n$ حيث \ln دالة اللوغاريتم النيبيري

عبّر بدلالة p_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثمّ احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$

تمرين 30

تقني رياضي - 2011 - الموضوع الثاني (7,5 نقاط)

الجزء الأول f الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

(\mathcal{C}_f) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)

1. ادرس تغيّرات الدالة f

2. عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (\mathcal{C}_f)

3. بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثمّ اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها

4. لتكن g الدالة العددية العرّفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = f(x) - x$

(أ) ادرس تغيّرات الدالة g

(ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$

5. (أ) حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$

(ب) ارسم المماس و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحى (C_f)

الجزء الثاني (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. باستخدام (C_f) و المستقيم (Δ) مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $1 \leq u_n < \alpha$

3. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

4. استنتج أنّ (u_n) متقاربة و بيّن أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

تمرين 31

تقني رياضي - 2008 - الموضوع الأول (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0; 2]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1. (أ) ادرس تغيّرات الدالة f على المجال $[0; 2]$

(ب) أنشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة على المحورين 4 cm)

(ج) برهن أنّه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإنّ $f(x) \in [0; 2]$

2. نعرّف المتتالية العددية (u_n) على كالاتي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(أ) برّر وجود المتتالية (u_n) . احسب الحدين u_1 و u_2

(ب) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$

(ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق

3. (أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

(ب) برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ $u_{n+1} > u_n$

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n) ؟

(ج) تحقق أنّ : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2} (u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

عيّن عددا حقيقيا k من $]0; 1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |u_n - \sqrt{3}|$

بيّن أنّه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 32

تقني رياضي - 2008 - الموضوع الثاني (8 نقاط)

1. f الدالة العددية المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يأتي : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

(\mathcal{C}_f) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) (وحدة الأطوال 2 cm)

(أ) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف

(ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

(ج) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (\mathcal{C}_f) ثم ارسم (\mathcal{C}_f) و (D)

(د) بين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) باستخدام (\mathcal{C}_f) و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل

(ب) خمن اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n)

(ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ و أن المتتالية (u_n) متزايدة

(د) استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3 شعبة رياضيات

تمرين 33

رياضيات - 2017 - الموضوع الثاني (4 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 7^{n+1} - 4$

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(أ) احسب بدلالة n المجموع S_n ثمّ جد علاقة بين S_n و S'_n

(ب) استنتج أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

3. (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

(ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5

تمرين 34

رياضيات - 2016 - الموضوع الثاني (4,5 نقاط)

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$
 (u_n) متتالية هندسية متزايدة تمام، حدودها موجتة تماما، حدّها الأول u_0 و أساسها q حيث :

1. احسب u_1 و u_2 ثمّ استنتج قيمة الأساس q

2. نضع : $u_1 = e^4$ و $q = e^3$

(أ) عبر عن u_n بدلالة n

(ب) نضع : $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n$. احسب S_n بدلالة n

3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n = n + 3$

(أ) بيّن أنّ : $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

(ب) عيّن القيم الممكنة لـ : $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$

(ج) عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$

4. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

5. نضع : $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016}$

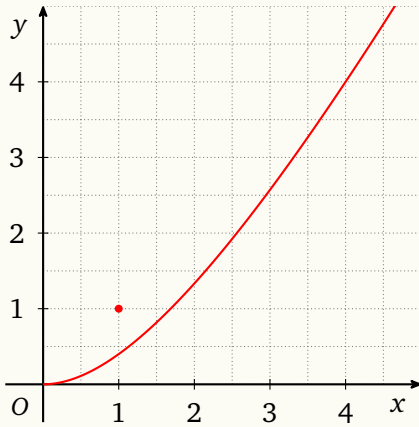
عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون :

$$\begin{cases} b_n \equiv 0 [7] \\ a_n \equiv 0 [5] \end{cases}$$

6. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7

تمرين 35

رياضيات - 2014 - الموضوع الأول (4,5 نقاط)



الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

(\mathcal{C}_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و

المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) كما هو مبين في الشكل المقابل :

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

2. المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

(أ) باستعمال المنحنى (\mathcal{C}_f) و المستقيم (Δ) متل، على محور الفواصل،

الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

3. (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

4. (أ) ادرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$

(ب) برهن بالترجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3 \left(\frac{6}{7}\right)^n$

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

تمرين 36

رياضيات - 2014 - الموضوع الثاني (4 نقاط)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 16$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$

1. (أ) احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7

(ب) خمن قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث : $u_{2k} \equiv a [7]$ و $u_{2k+1} \equiv b [7]$

2. (أ) برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n [7]$

(ب) برهن بالترجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2 [7]$ ، ثم استنتج أن : $u_{2k+1} \equiv 3 [7]$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول

(ب) احسب، بدلالة n ، كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين 37

رياضيات - 2011 - الموضوع الأول (4 نقاط)

$$\begin{cases} m = \text{PPCM}(u_3; u_5) \\ d = \text{PGCD}(u_3; u_5) \end{cases} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} u_4 = 15 \\ d + m = 42 \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تُحقق :}$$

1. عيّن الحدين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0
2. اكتب u_n بدلالة n ، ثم بيّن أنّ 2010 هو حد من حدود (u_n) و عيّن رتبته
3. عيّن الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080
4. n عدد طبيعي غير معدوم.

$$(أ) \quad \text{اكتب بدلالة } n \text{ المجموع } S \text{ حيث } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2n}$$

$$(ب) \quad \text{استنتج بدلالة } n \text{ المجموعين } S_1 \text{ و } S_2 \text{ حيث : } S_1 = u_0 + u_2 + \dots + u_{2n} \quad \text{و} \quad S_2 = u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1}$$

تمرين 38

رياضيات - 2009 - الموضوع الثاني (4 نقاط)

(u_n) المتتاليو المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$ المتتالية المعرفة من

أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عدنان حقيقيان

1. عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها و حدّها الأول
2. احسب كلا من u_n و v_n بدلالة n
3. احسب المجموعين S و S' حيث : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
4. (أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5
- (ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5

تمرين 39

رياضيات - 2008 - الموضوع الأول (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

(\mathcal{C}_f) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(الوحدة على المحورين 2 cm)

$$(أ) \quad \text{احسب } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ و فسّر النتيجة هندسيا}$$

(ب) ادرس تغيّرات الدالة f

(ج) باستعما منحنى دالة " الجذر التربيعي "، أنشئ المنحنى (\mathcal{C}_f)

(د) ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

$$2. \text{ نعرّف المتتالية } (u_n) \text{ على المجموعة } \mathbb{N} \text{ كالآتي : } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(ا) باستعمال (D) و (C_f) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3. (ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$

(ب) استنتج أنّ (u_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 40

رياضيات - 2008 - الموضوع الثاني (4 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3

2. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(ا) برهن بالترجع أنّ (v_n) متتالية ثابتة

(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. (w_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

احسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$